МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

И.И. КУЛЕШОВА

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Часть II

Методическое пособие для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика» всех форм обучения

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве методического пособия для студентов направления подготовки «Экономика» всех форм обучения

Рубцовск 2023

УДК 517.9

Кулешова И.И. Математика для экономических расчетов: Методическое пособие для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» всех форм обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2023. - 126 с.

Методическое пособие содержит теоретический и практический материал по теории дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений с достаточным количеством примеров, помогающих самостоятельно изучить рассмотренные темы. Пособие рекомендуется для студентов, обучающихся по экономическим направлениям. Пособие содержит большое число разнообразных примеров и задач с решением. Каждое понятие, метод, теорема поясняются примерами. Пособие содержит весь материал, предусмотренный программой.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 10 от 21.12.2023 г.

Рецензент:
к.э.н., доцент Д. В. Ремизов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРОИЗВОДНАЯ

1.1. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x.

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента x в точке* x_0 (кратко – приращением аргумента) и обозначается символом Δx (читается: «дельта икс»).

Аналогично, разность $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 (кратко – приращением функции) и обозначается символом Δy (читается: «дельта игрек»)*. Величины Δx и Δy показаны на рисунке 1.1. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \tag{1.1}$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0), \tag{1.2}$$

или

$$x = x_0 + \Delta x, \;\; y = y_0 + \Delta y. \tag{1.3}$$

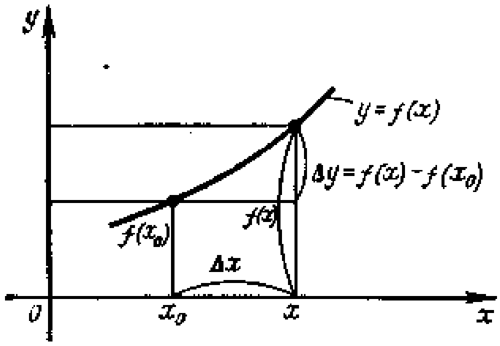


Рис. 1.1

Подставляя в формулу (1.2) выражение для x из равенства (1.3), получим

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1.4}$$

Как правило, в тех случаях, когда вводятся Δx и Δy, исходное значение аргумента x_0 считается фиксированным, а новое значение x – переменным. Тогда $y_0 = f(x_0)$ оказывается постоянной, $y = f(x)$ - переменной. Приращения Δy и Δx также будут переменными. Формула (1.4.) показывает, что переменная Δy является функцией переменной Δx.

Пример 1.1. Для функции $y = x^2$ в точке x_0 найти приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx.

Решение. По формуле (1.4) имеем

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

---

* Нельзя рассматривать Δx как произведение Δ на x; это единый символ. То же самое относится к Δy.

1.2. Определение непрерывности функции с помощью понятий приращения аргумента и приращения функции

Согласно определению непрерывности функции функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.5}$$

При этом предполагалось, что функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Это определение можно сформулировать, пользуясь понятиями приращения функции и приращения аргумента. Действительно, формула (1.5), очевидно, равносильна равенству

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0. \tag{1.5'}$$

Полагая $x - x_0 = \Delta x$ и $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ и замечая, что при $x \to x_0$ $\Delta x \to 0$ (и, обратно, при $\Delta x \to 0$ $x \to x_0$), вместо соотношения (1.5’) мы получим следующую формулу, равносильную формуле (2.5):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{1.6}$$

Иными словами, *функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента* Δx *соответствует бесконечно малое приращение функции* Δy.

З а м е ч а н и е. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ терпит разрыв, то при $\Delta x \to 0$ Δy либо стремится к пределу, отличному от нуля, либо не имеет предела.

1.3. Задача о производительности труда

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции *u* за время *t* и необходимо найти производительность труда в момент t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$, тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{ср} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

1.4. Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции* Δy *в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента* Δx *при произвольном стремлении* Δx *к нулю.*

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.8}$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.9}$$

Для одной и той же функции $f(x)$ производную можно вычислять в различных точках x. Пусть M – множество всех таких значений x. Правило, по которому каждому $x \in M$ соответствует производная в этой точке $f'(x)$, представляет собой новую функцию, определенную на множестве M. Эта функция называется производной от функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$ (читается: «эф штрих от икс»)*.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является значением функции $f'(x)$ в точке x_0.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной функции употребляются и другие обозначения, например: y', y'_x, $\left[f(x)\right]'_x$.

Пример 1.2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Пользуясь определением производной и считая x фиксированным, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, производная функции x^2 равна $2x$: $\left(x^2\right)' = 2x$. Эта производная определена на всей числовой оси, так как при ее нахождении значение x было выбрано произвольно.

---

* Иногда для определенности производную функции $y = f(x)$ мы будем называть производной функции y по x, или производной функции $f(x)$ по x.

1.5. Дифференцируемость функции

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в этой точке.* Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой в интервале* $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Например, функция $y=x^2$ дифференцируема (т.е. имеет производную) в любой точке x, следовательно, ее можно назвать дифференцируемой в бесконечном интервале $[-\infty,+\infty]$, т.е. на всей числовой оси.

Докажем следующую теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Т е о р е м а. *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение Δx, не равное нулю. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy. Рассмотрим очевидное тождество $\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$. Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0,$$

откуда и следует, согласно п. 2.2, непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Обратная теорем неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми.

Рассмотрим пример. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой оси и, в частности, при $x=0$. Покажем, что в точке $x=0$ эта функция не имеет производной. В самом деле, в точке $x=0$ приращению аргумента Δx соответствует приращение функции

$$\Delta y=\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty.$$

Это значит, что функция $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=0$ не имеет производной.

1.6. Геометрический смысл производной

В этом пункте мы выясним геометрический смысл производной, что окажется очень полезным при усвоении многих понятий математического анализа и при решении некоторых геометрических задач.

С этой целью введем определение касательной к кривой в данной точке.

Пусть на плоской кривой *C* задана точка M_0. Рассмотри другую точку *M* этой кривой и проведем секущую M_0M (рис. 1.2). Если точка *M* начинает перемещаться по кривой *C*, а точка M_0 остается неподвижной, то секущая

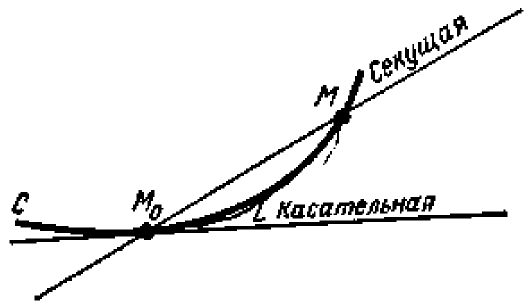


Рис. 1.2

меняет свое положение. Допустим, что существует прямая *L*, проходящая через точку M_0, которая обладает следующим свойством: если точка *M* при перемещении ее по кривой *C* неограниченно приближается к точке M_0 (с любой ее стороны), то угол между прямой *L* и секущей M_0M стремится к нулю. Тогда эта прямая *L* называется касательной к кривой *C* в точке M_0.

Кратко говоря, *касательная есть прямая, занимающая предельное положение секущей.*

З а м е ч а н и е. Аналогично определяется касательная и к пространственной кривой.

Рассмотрим теперь график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке M_0 с абсциссой x_0 невертикальную касательную (рис. 1.3). Найдем ее угловой коэффициент $k = tg\alpha$, где α - угол касательной с осью *Ox*. Для этого проведем через точку M_0 и точку *M* графика с абсциссой $x_0 + \Delta x$ секущую. Ее угловой коэффициент

$$k_{сек} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где β - угол секущей с осью *Ox* (см. рис. 4). При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, и поэтому точка *M*, перемещаясь по графику, неограниченно приближается к точке M_0. При этом секущая неограниченно приближается к касательной, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$. Поэтому угловой коэффициент касательной

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, *угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0:*

$$k_{кас} = f'(x_0). \qquad (1.10)$$

З а м е ч а н и е. Мы показали, что если график непрерывной функции

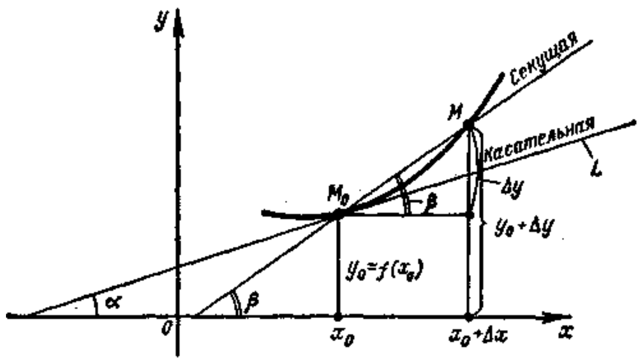


Рис. 1.3

$y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке с абсциссой x_0, то в этой точке существует производная $f'(x_0)$, равная угловому коэффициенту касательной $k_{кас}$. Можно показать, что и обратно, если в точке x_0 функция имеет производную, то ее график в точке с абсциссой x_0 имеет невертикальную касательную.

Пример 1.3. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2;4)$.

Решение.

$$\left(x^2\right)'\Big|_{x=2} = 2x\big|_{x=2} = 4.$$

Угловой коэффициент касательной к графику функции к точке $M_0(2;4)$ равен значению производной этой функции в точке $x = 2$, т.е. $k = 4$.

1.7. Производные некоторых основных элементарных функций

Производная постоянной $y = C$. Так как функция $y = C$ сохраняет постоянное значение на всей числовой оси, то в произвольно выбранной точке x любому приращению аргумента Δx соответствует приращение функции Δy, равное нулю. Поэтому

$$(C') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Итак,

$$(C)' = 0 \qquad (1.11)$$

Производная степенной функции $y = x^n$ *с натуральным показателем n.* Пусть x – произвольно выбранная точка, Δx - приращение аргумента в этой точке и Δy - соответствующее приращение данной функции. Тогда по формуле бинома Ньютона

$$\left(a+b\right)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

получим

$$\Delta y = \left(x+\Delta x\right)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\cdot \Delta x + \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \left(\Delta x\right)^n - x^n,$$

или

$$\Delta y = nx^{n-1}\cdot \Delta x + \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \left(\Delta x\right)^n.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \left(\Delta x\right)^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \left(\Delta x\right)^{n-1}\right] = nx^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \qquad (1.12)$$

Производная касательной функции $y = a^x$. Давая приращение Δx произвольно выбранному значению аргумента x, получим следующее приращение показательной функции:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Следовательно,

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = a^x\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a$.

Таким образом,

$$\left(a^x\right)' = a^x\cdot \ln a. \qquad (1.13)$$

В частности, при $a = e$ получим

$$\left(e^x\right)' = e^x, \qquad (1.14)$$

так как $\ln e = 1$.

Производная логарифмической функции $y = \log_a x$. Возьмем любое значение x из области определения логарифмической функции и дадим ему приращение Δx, тогда приращение функции

$$\Delta y=\log_a\left(x+\Delta x\right)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Поэтому

$$\left(\log_a x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Для того чтобы найти этот предел, сделаем следующее преобразование:

$$\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}.$$

Принимая во внимание, что величина x постоянна и что при $\Delta x\to 0$ также и $\dfrac{\Delta x}{x}\to 0$, то, принимая во внимание, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a\left(1+x\right)}{x}=\log_a e,$$

получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Итак, $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$, или, поскольку $\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$, окончательно имеем

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{1.15}$$

В частности, при $a=e$ получим

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}, \tag{1.16}$$

так как $\log_e e=\ln e=1$.

Производные функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$. Пусть Δx - приращение произвольно выбранного значения аргумента x функции $y=\sin x$. Тогда приращение этой функции

$$\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\sin x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

так как по формуле $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$.

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{1.17}$$

Аналогично выводится формула для производной функции $y = \cos x$:

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{1.18}$$

1.8. Основные правила дифференцирования

Основные правила дифференцирования сформулируем в следующих теоремах (без доказательств).

Т е о р е м а 1. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в той же точке дифференцируема и их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых:*

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{1.19}$$

З а м е ч а н и е. Формула (1.21) легко обобщается на случай любого конечного числа слагаемых:

$$(u + v + ... + t)' = u' + v' + ... + t'. \tag{1.20}$$

Пример 1.4. Найти производную функции $y = x^3 + \sin x + \ln x$.

Решение. Применяя сначала формулу (1.20), а затем формулы (1.12), (1.17) и (1.16), получим

$$y' = \left(x^3 + \sin x + \ln x\right)' = \left(x^3\right)' + (\sin x)' + (\ln x)' = 3x^2 + \cos x + \frac{1}{x}.$$

Т е о р е м а 2. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в той же точке дифференцируемо и их произведение. При этом производная произведения находится по следующей формуле:*

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{1.21}$$

С л е д с т в и е. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной:*

$$(cu)' = cu'. \tag{1.22}$$

Действительно, если $v = c$ (c – постоянная), то по формуле (2.21)

$$(cu)' = (c)'u + cu' = 0 \cdot u + c \cdot u' = cu'.$$

В частности, можно выносить за знак производной множитель, равный -1, что равносильно вынесению минуса за знак производной:

$$(-u)' = -u'. \tag{1.23}$$

На этом основании можно получить формулу для производной разности двух функций:

$$(u - v)' = u' - v'. \tag{1.24}$$

Пример 1.5. Найти производную функции $y = e^x \cos x$.

Решение. По формулам (1.21), (1.14) и (1.18) получим

$$y' = \left(e^x \cos x\right)' = \left(e^x\right)' \cdot \cos x + e^x \left(\cos x\right)' = e^x \cos x + e^x \left(-\sin x\right) = e^x \left(\cos x - \sin x\right).$$

Пример 1.6. Найти производную многочлена $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Решение. Применяя последовательно формулы (1.20), (1.22), (1.12) и (1.11), получим

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 + 5x + 2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(-3x^2\right)' + \left(5x\right)' + \left(2\right)' =$$

$$= 3x^2 - 3\left(x^2\right)' + 5\left(x\right)' + 0 = 3x^2 - 3\cdot 2x + 5\cdot 1 = 3x^2 - 6x + 5.$$

З а м е ч а н и е. Формулу (2.21) можно обобщить на случай любого конечного числа *n* сомножителей. Если, например, *n*=3, то

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{1.25}$$

В самом деле,

$$(uvw)' = \left[(uv)w\right]' = (uv)'\, w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Т е о р е м а 3. *Если в данной точке x функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы и $v \neq 0$, то в той же точке дифференцируемо и их частное u/v, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{1.26}$$

Найдем производную функции $y = tgx$.

Представив данную функцию в виде частного $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, по формуле (1.26) получим:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{1.27}$$

При этом условие $v = \cos x \ x \neq 0$ выполняется для любого x, принадлежащего области определения функции tgx.

Аналогично выводится формула для производной функции $y = ctgx$:

$$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (1.28)$$

1.9. Производная обратной функции

Пусть функция $x = f\left(y\right)$ монотонна и дифференцируема в некотором интервале и имеет в точке y этого интервала производную $f'\left(y\right)$, не равную нулю. Покажем, что в соответствующей точке x обратная функция $y = f^{-1}\left(x\right)$ имеет производную $\left[f^{-1}\left(x\right)\right]'$, причем

$$\left[f^{-1}\left(x\right)\right]' = \frac{1}{f'\left(y\right)}. \qquad (1.29)$$

Так как по условию функция $x = f\left(y\right)$ монотонна и дифференцируема (а следовательно, и непрерывна), то по теореме о существовании обратной функции функция $y = f^{-1}\left(x\right)$ существует, монотонна и непрерывна. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция $y = f^{-1}\left(x\right)$ получит приращение Δy, которое в силу ее монотонности будет отличным от нуля. Кроме того, вследствие непрерывности функции $y = f^{-1}\left(x\right)$ при $\Delta x \to 0$ приращение Δy также стремится к нулю. Следовательно,

$$\left[f^{-1}\left(x\right)\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'\left(y\right)}.$$

Формулу (1.29) можно записать в таком виде:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (1.30)$$

1.10. Производные обратных тригонометрических функций

Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$; эта функция в интервале $-\pi/2 < y < \pi/2$ монотонна и дифференцируема, а ее производная $x' = \cos y$ в этом интервале в нуль не обращается.

Следовательно, по формуле (2.30) получим $y'_x = 1/x'_y = 1/\cos y$. Но $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ *. Таким образом, $y' = 1\Big/\sqrt{1-x^2}$, т.е.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.31}$$

Аналогично найдем производную функции $y = arctgx$. Эта функция по определению должна удовлетворять условию $-\pi/2 < y < \pi/2$. При этом обратная функция $x = tgy$ монотонна и дифференцируема. По формуле (1.27) находим $x'_y = 1/\cos^2 y$. Следовательно, согласно формуле (2.30) имеем $y'_x = \cos^2 y$. Но $\cos^2 y = 1\Big/\left(1 + tg^2 y\right) = 1\Big/\left(1+x^2\right)$. Поэтому $y' = 1\Big/\left(1+x^2\right)$, или

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{1.32}$$

Приведем формулы для производных функций $y = \arccos x$ и $y = arctgx$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1.33}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{1.34}$$

1.11. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда *y* есть сложная функция *x*: $y = f\left[\varphi(x)\right]$, а переменная *u* – промежуточный аргумент.

Как найти производную сложной функции y'_x, зная производную y'_u и производную промежуточного аргумента u'_x? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если функция* $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x *в точке x, а функция* $y = f(u)$ имеет производную y'_u *в соответствующей точке u, то сложная функция* $y = f\left[\varphi(x)\right]$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по следующей формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{1.35}$$

Часто пользуются менее точной, но более короткой формулировкой этой теоремы: *производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дадим *x* приращение Δx. Тогда *u* и *y* получат соответственно приращения Δu и Δy.

Предположим, что Δu при $\Delta x \to 0$ не принимает значений, равных нулю. Тогда имеет место тождество

---

* Знак «плюс» перед корнем выбран потому, что $\cos y$ в интервале $-\pi/2 < y < \pi/2$ положителен.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (1.36)$$

Переходя в равенстве (2.36) к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема, а следовательно, и непрерывна, то при $\Delta x\to 0$ также $\Delta u\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$. Поэтому

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Что и требовалось доказать.

Можно показать, что формула (1.35) оказывается верной и в случае, когда Δu при $\Delta x\to 0$ принимает значения, равные нулю.

Пример 1.7. Найти производную функции $y=\sin x^3$.

Решение. Данная функция – сложная. Введя обозначение $u=x^3$, получим $y=\sin u$. По формуле (1.37) находим

$$y'_x=(\sin u)'_u\cdot\left(x^3\right)'_x=\cos u\cdot 3x^2,$$

Или, поскольку $u=x^3$,

$$y'_x=\cos x^3\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3.$$

Сложная функция может быть составлена не из двух звеньев, как это было в только что рассмотренном примере, а из большего их числа. В таких случаях необходимо ясно представить себе, какое из действий, приводящих к значению сложной функции, является последним. При дифференцировании сложной функции та величина, над которой совершается последнее действие, принимается за промежуточный аргумент *u*.

Пример 1.8. Найти производную функции $y=\ln arctgx^2$.

Решение. Для данной функции последним действием является взятие натурального логарифма. Это действие совершается над функцией $arctgx^2$. Поэтому принимаем за промежуточный аргумент $u=arctgx^2$. Тогда $y=\ln u$. Найдем производную y' по формуле (1.37):

$$y'_x=(\ln u)'_u\cdot\left(arctgx^2\right)'_x=\frac{1}{u}\left(arctgx^2\right)'_x=\frac{1}{arctgx^2}\cdot\left(arctgx^2\right)'_x.$$

Дифференцирование не закончено, так как не найдена производная функции $arctgx^2$. Эта функция также сложная, и последним действием для нее является нахождение арктангенса от x^2. Поэтому, применяя повторно формулу (1.35) и полагая в ней уже $u = x^2$, получим

$$\left(arctgx^2\right)'_x = \left(arctgu\right)'_u \cdot \left(x^2\right)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Окончательно имеем

$$y' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) \cdot arctgx^2}.$$

При достаточном навыке буква u для обозначения промежуточного аргумента не вводится. Вот как, например, могут быть найдены производные только что рассмотренных сложных функций:

$$\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Аналогично

$$\left(\ln\ arctgx^2\right)' = \frac{1}{arctgx^2}\left(arctgx^2\right)' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot \left(x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) arctgx^2}.$$

1.12. Производная степенной функции с любым показателем

В п. 1.7 была введена формула производной степенной функции $y = x^n$ при натуральном n. Найдем производную степенной функции $y = x^n$ с любым действительным показателем n. Считая x положительным, воспользуемся тождеством $x^n = e^{n \ln x}$ *. Тогда $y = e^{n \ln x}$ есть сложная функция x, и ее производная находится по формуле (2.35):

$$y' = \left(e^{n \ln x}\right)' = e^{n \ln x} \cdot \left(n \ln x\right)' = e^{n \ln x} \cdot \frac{n}{x}.$$

Так как $e^{n \ln x} = x^n$, то

$$y' = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Результат получится такой же, как при натуральном показателе (см. формулу (1.12)):

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

Можно показать, что если при $x < 0$ функция $y = x^n$ существует, то формула (1.12) также остается справедливой.

---

* Справедливость этого тождества легко устанавливается логарифмированием обеих его частей по основанию *e*.

1.13. Сводная таблица формул дифференцирования

I. $y = C;\ y' = 0$.	VIII. $y = ctgx;\ y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
II. $y = x^n;\ y' = nx^{n-1}$.	IX. $y = \arcsin x;\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
III. $y = a^x;\ y' = a^x \ln a$.	X. $y = \arccos x;\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
III’. $y = e^x;\ y' = e^x$.	XI. $y = arctgx;\ y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
IV. $y = \log_a x;\ y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.	XII. $y = arcctgx;\ y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
IV’. $y = \ln x;\ y' = \dfrac{1}{x}$.	XIII. $y = shx;\ y' = chx$.
V. $y = \sin x;\ y' = \cos x$.	XIV. $y = chx;\ y' = shx$.
VI. $y = \cos x;\ y' = -\sin x$.	XV. $y = thx;\ y' = \dfrac{1}{ch^2 x}$.
VII. $y = tgx;\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.	XVI. $y = cthx;\ y' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

1.14. Уравнения касательной и нормали к кривой

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в некоторой его точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, есть прямая, проходящая через эту точку и имеющая угловой коэффициент $k_{кас}$, равный $f'(x_0)$ (см. п. 1.6). Поэтому уравнение этой касательной можно найти, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку $y - y_0 = k(x - x_0)$ или

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (1.37)$$

Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной (рис. 1.4).

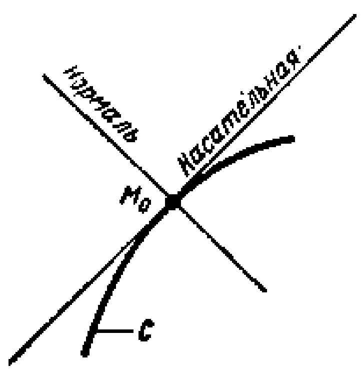


Рис. 1.4

Рассмотрим график функции $y = f(x)$; пусть $M_0(x_0;y_0)$ - одна из его точек. Тогда уравнение нормали к графику функции в данной точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \qquad (1.38)$$

так как угловой коэффициент нормали $k_н$ связан с угловым коэффициентом касательной $k_{кас} = f'(x_0)$ условием перпендикулярности:

$$k_н = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 1.9. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = tgx$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi/4$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_0 = tgx_0 = tg(\pi/4) = 1$. Дифференцируем данную функцию: $(tgx)' = 1/\cos^2 x$ и находим угловой коэффициент касательной $k_{кас} = 1/\cos^2 x\big|_{x=\pi/4} = 2$ и угловой коэффициент нормали $k_н = -1/2$. По формулам (1.37) и (1.38) находим уравнения касательной и нормали:

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \; y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

1.15. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике

Было установлено, что производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной.*

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx — прирост продукции, тогда Δy — приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** *производства и характеризует приближенно дополнительны затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов на основе анализа этих пре дельных величин получило название *предельного анализа.* Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а *процесс, изменение экономического объекте* Таким образом, *производная выступает как скорость изменения не которого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.* Следует учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей В(времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). Вместе с тем в ряде случаев можно отвлечься от дискретности показателей и эффективно использовать предельные величины.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним[1] предельным доходом[1]** в условиях монопольного и конкурентное рынков.

Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на | количество продукции q, т.е. $r = pq$.

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно, цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса $p(q)$ — есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a < 0$, $b > 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq+b)q = aq^2 + bq$ (рис. 1.5). В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{cp} = \frac{r}{q} = aq + b$, а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит $r_q^{'} = 2aq + b$ (рис. 1.5). Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.*

[1] В экономической литературе п р е д е л ь н ы е величины называют также маржинальными. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *М;* при записи с р е д н и х величин добавляется буква *А* (от англ *average* — средняя). Например, *MR* — предельный доход, *АК* — средний доход.

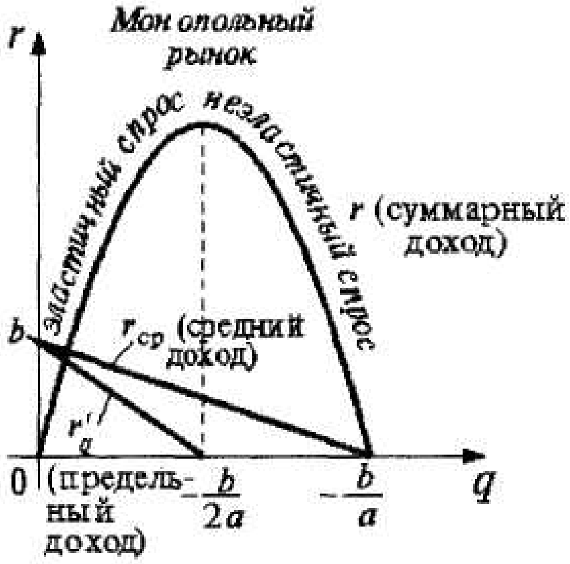


Рис. 1.5

В условиях с о в е р ш е н н о й   к о н к у р е н ц и и , когда число участников рынка велико, и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p=b$. При этом суммарный доход составит $r = pq$ и соответственно средний доход $r_{cp} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r_q^{'} = b$ (рис. 1.6).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка* в отличие от монопольного *средний и предельный доходы совпадают.*

Рис. 1.6

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие **эластичности функции.**

Определение. ***Эластичностью функции*** $E_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции* y *к относительному приращению переменной* x *при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (1.39)$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Выясним геометрический смысл эластичности функции. По определению (1.39)

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y' = \frac{x}{y}tg\alpha,$$

где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x, y)$ (см. рис. 1.7). учитывая, что из треугольника MBN $MN = x\ tg\alpha$, $MC=y$, а из подобия треугольников MBN и AMC $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$, получим $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, т.е. т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данное точки графика функции до точек ее пересечения с осями* Ox и Oy. Если точки пересечения касательной к графику функции A и B находятся по одну сторону от точки M, то эластичность $E_x(y)$ положительна (рис. 1.7), если по разные стороны, то $E_x(y)$ отрицательна (рис. 1.8).

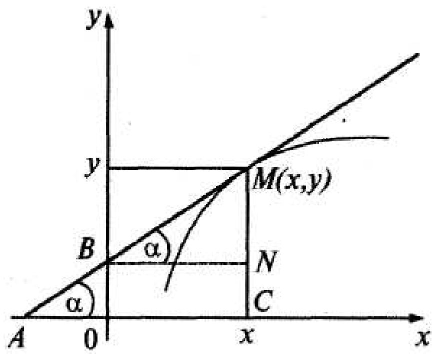


Рис. 1.7

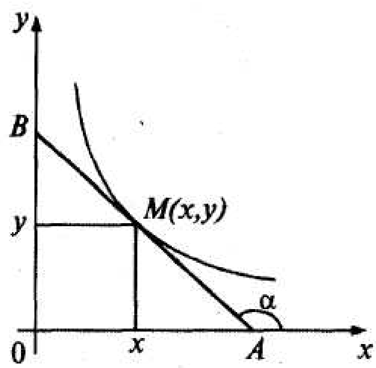


Рис. 1.8

Отметим свойства эластичности функции.

1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной* x *на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y)=xT_y. \qquad (1.40)$$

2. *Эластичность произведения (частного)* двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \tag{1.41}$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \tag{1.42}$$

3. *Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \tag{1.43}$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса y относительно цены x (или дохода x) — коэффициент, определяемый по формуле (2.39) и показывающий приближенно, на сколько процентов изменится спрос (объем потребления) при изменении цены (или дохода) на 1%.

Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $\left|E_x(y)\right| > 1$, то спрос считают *эластичным,* если $\left|E_x(y)\right| < 1$ — *неэластичным* относительно цены (или дохода). Если $\left|E_x(y)\right| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью.*

Выясним, например, как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход $r = pq$ при реализации продукции. Выше мы предполагали, что кривая спроса $p = p(q)$ — линейная функция; теперь будем полагать, что $p=p(q)$ — произвольная функция. Найдем предельный доход

$$r_q' = (pq)_q' = p_q' \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p_q'\right) = p\left(1 + E_q(p)\right).$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (2.43) для эластичности взаимно обратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно спроса, т.е. $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$, а также то, что $E_p(q)<0$, получим при п р о и з в о л ь н о й кривой спроса

$$p_q' = p\left(1 - \frac{1}{\left|E_p(q)\right|}\right). \tag{1.44}$$

Если спрос неэластичен, т.е. $\left|E_p(q)\right| < 1$, то в соответствии с (1.44) предельный доход r_q' о т р и ц а т е л е н при любой цене; если спрос эластичен, т.е. $\left|E_p(q)\right| > 1$, то предельный доход r_q' п о л о ж и т е л е н. Таким образом, для неэластичного спроса изменения цены и предельного дохода происходят в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных. Это означает, что *с возрастанием цены для продукции эластичной спроса суммарный доход от реализации продукции увеличивается, а для товаров неэластичного спроса —*

уменьшается. На рисунке 1.5 на кривых доходов выделены области эластичного и неэластичного спроса.

Пример 1.10. Зависимость между издержками производства *у* и объемом выпускаемой продукции *х* выражается функцией *у* = 50*х* — 0,05 *х*^{3} (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Решение. Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением $y_{cp}=\dfrac{y}{x}=50-0,05x^2$; при x = 10 средние издержки (на единицу продукции) равны $y_{cp}\left(10\right)=50-0,05\cdot10^2=45$ (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной *у'*(*х*) = 50-0,15*х*^{2}*;* при *х* = 10 предельные издержки составят *у'*(10) = 50-0,15-10^2 = 35 (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

Пример 1.11. Зависимость между себестоимостью единицы продукции *у* (тыс. руб.) и выпуском продукции *х* (млрд. руб.) выражается функцией $y=-0,5x+80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. По формуле (7.33) эластичность себестоимости

$$E_x\left(y\right)=\frac{-0,5x}{-0,5x+80}=\frac{x}{x-160}.$$

При *x*=60 $E_{x=60}\left(y\right)=-0,6$, т.е.при выпуске продукции, равном 60 млн. руб, увеличение его на 1% привел к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 1.12. Объем продукции *u*, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u=-\dfrac{5}{6}t^3+\dfrac{15}{2}t^2+100t+50$ (ед.), $1\le t\le8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда выражается производной

$$z\left(t\right)=u'\left(t\right)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $z'\left(t\right)$ и логарифмической производной $T_z\left(t\right)=\left[\ln z\left(t\right)\right]'$:

$$z'\left(t\right)=-5t+15 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$T_z\left(t\right)=\frac{z'\left(t\right)}{z\left(t\right)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t-40} \text{ (ед./ч).}$$

В заданные моменты времени $t_1=1$ и $t_2=8-1=7$ соответственно имеем: $z\left(1\right)=112,5$ (ед./ч), $z'\left(1\right)=10$ (ед./ч^2), $T_z\left(1\right)=0,09$ (ед./ч) и $z\left(7\right)=82,5$ (ед./ч), $z'\left(7\right)=-20$ (ед./ч^2), $T_z\left(7\right)=-0,24$ (ед./ч).

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

Пример 1.13. Опытным путем установлены функции спроса $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение. *а*) Равновесная цена определяется из условия $q=s$: $\dfrac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5$, откуда p=2, т.е. равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдем эластичности по спросу и предложению по формуле (1.39):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \qquad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для равновесной цены p = 2 имеем $E_{p=2}(q)$ = -0,3; $E_{p=2}(s) = 0{,}8$

Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше 1, то и спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличений цены p на 5% от равновесной спрос уменьшается на 5-0,3 = 1,5%, следовательно, доход возрастает на 3,5%.

2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Т е о р е м а. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, дифференцируемые в некотором полуинтервале $(a,b]$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, и пусть при $x \to a+0$ обе эти функции стремятся к нулю, или обе стремятся к бесконечности. В таком случае, если отношение их производных имеет предел при $x \to a+0$, то этот же предел имеет и отношение самих функций $f(x)/\varphi(x)$, т.е.*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся доказательством для случая $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} \varphi(x) = 0$. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке a, полагая $f(a) = \varphi(a) = 0$. Тогда эти функции станут непрерывными на сегменте

$\left[a,b\right]$ и будут удовлетворять условиям теоремы Коши для любого сегмента $\left[a,x\right]$, где $a<x<b$. Поэтому

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где $a<c<x$. Заметим, что c зависит от x, но при $x\to a+0$ величина c также стремится к a. Следовательно,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 2.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5.$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8.$$

Пример 3.3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель представляют собой бесконечно большие функции при $x\to+\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Аналогично можно показать, что вообще

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{a_0x^n+a_0x^{n-1}+\ldots+a_n}{e^x}=0,$$

т.е. *многочлен любой степени растет медленнее показательной функции.*

З а м е ч а н и е. Согласно правилу Лопиталя, если существует предел отношения производных данных функций, то существует и предел отношения самих функций. Если же предел отношения производных не существует, то это еще не означает, что не существует предел отношения самих функций. Рассмотрим, например, две бесконечно большие функции при $x\to+\infty$: $f(x)=x+\sin x$ и $\varphi(x)=x$. Предел их отношения при $x\to+\infty$ существует, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Однако предел отношения производных данных функций

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{(x+\sin x)}{(x)'}=1+\cos x$$

не существует, так как $\cos x$ при $x\to+\infty$ не имеет предела.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

3.1. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции

Функция $y=f(x)$, определенная на сегменте (или интервале), называется *возрастающей* на этом сегменте (или интервале), если из неравенства $x_2>x_1$, где x_2 и x_1 - любые две точки, принадлежащие сегменту (или интервалу), следует неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ (рис. 3.1).

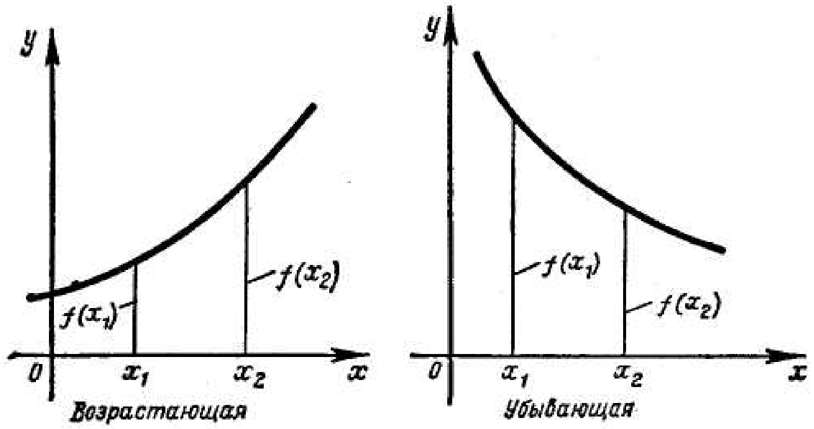


Рис. 3.1

Введя обозначения $x_2-x_1=\Delta x$ и $f(x_2)-f(x_1)=\Delta y$, замечаем, что Δx и Δy имеют одинаковые знаки. Следовательно, для возрастающей функции отношение приращений функции и аргумента всегда положительно, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$.

Функция $y=f(x)$, определенная на сегменте (или интервале), называется *убывающей* на этом сегменте (или интервале), если из неравенства $x_2>x_1$, где x_2 и x_1 - любые две точки, принадлежащие сегменту (или интервалу), следует неравенство $f(x_2)<f(x_1)$ (см. рис. 3.1).

В этом случае приращения $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ имеют разные знаки и поэтому для убывающей функции отношение приращений отрицательно, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции в интервале.

Т е о р е м а 1 (н е о б х о д и м о е у с л о в и е в о з р а с т а н и я ф у н к ц и и). *Если дифференцируемая в интервале* (a,b) *функция* $y = f(x)$ *возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке данного интервала, т.е.* $f'(x) \ge 0$ *для* $a < x < b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = f(x)$ - функция, возрастающая в интервале $]a,b[$. Рассмотрим две точки x и $x + \Delta x$, принадлежащие интервалу $]a,b[$. Тогда, как было указано выше, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$*. Так как по предположению функция дифференцируема, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ и, следовательно, $f'(x) \ge 0$.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 2 (н е о б х о д и м о е у с л о в и е у б ы в а н и я ф у н к ц и и). *Если дифференцируемая в интервале* (a,b) *функция* $y = f(x)$ *убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке данного интервала, т.е.* $f'(x) \le 0$ *для* $a < x < b$.

Рассмотренные теоремы можно наглядно иллюстрировать геометрически. Действительно, график возрастающей функции при движении вправо по оси абсцисс поднимается вверх. В таком случае касательные к графику образуют острые углы α с положительным направлением оси *Ox* или, быть может, в некоторых точках (например, в точке x_1) параллельны оси *Ox* (рис. 4.2, а).

Так как тангенсы острых углов положительны (в тех точках, где касательные параллельны оси *Ox*, равны нулю) и так как по геометрическому смыслу производной $tg\alpha = f'(x)$, то для возрастающей функции $f'(x) \ge 0$.

---

* Так как предел положительной функции не может быть отрицательным

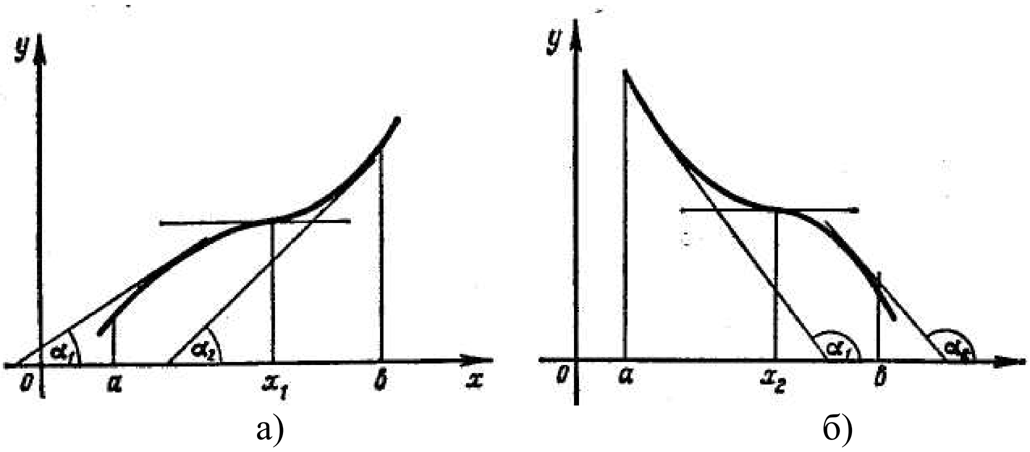


Рис. 3.2

Аналогично, если функция убывает (рис. 3.2, б), то касательные образуют с осью *Ox* тупые углы α или в некоторых точках (например, в точке x_2) параллельны оси *Ox*. Так как тангенсы тупых углов отрицательны, то для убывающей функции $f'(x) \le 0$.

Теорема 3 (достаточное условие возрастания функции). *Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет положительную производную, то эта функция возрастает на сегменте $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ для всех $a < x < b$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из сегмента $[a,b]$, *причем* $x_2 > x_1$. Напишем формулу Лагранжа (3.3) применительно к сегменту $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \ x_1 < c < x_2 .$$

Во всех точках сегмента $[a,b]$ *производная* $f'(x) > 0$, поэтому и $f'(c) > 0$. Так как, кроме того, $x_2 - x_1 > 0$, то произведение $(x_2 - x_1) f'(c) > 0$ и, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a,b]$.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

Теорема 4 (достаточное условие убывания функции). *Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет отрицательную производную, то эта функция убывает на сегменте $[a,b]$.*

Напомним, что функция только возрастающая или только убывающая в каком-либо интервале называется монотонно возрастающей или монотонно убывающей в этом интервале.

Пример 3.1. Определить интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. Производная функции равна $y' = 3x^2 - 3$. Функция возрастает для всех значений *x*, при которых $y' > 0$. Решая неравенство $3x^2 - 3 > 0$, находим: $x>1$ или $x<-1$. Таким образом, функция возрастает в интервалах $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$. Убывает функция для значений x, при которых $y'<0$. Решая неравенство $3x^2-3<0$, находим $x^2<1$, или $-1<x<1$. Функция убывает в интервале $-1<x<1$. График функции $y=x^3-3x$ изображен на рисунке 4.3.

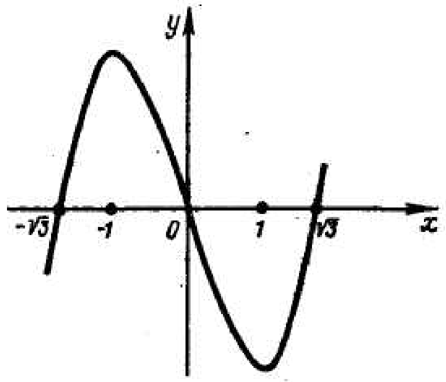


Рис. 3.3

3.2. Максимум и минимум функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y=f(x)$, изображенный на рисунке 4.4. Как видно из рисунка, значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех соседних точках как слева, так и справа от x_1. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум. В точке x_3 функция, очевидно, также имеет максимум.

Функция $y=f(x)$ имеет максимум в точке x=c, если существует такая окрестность точки x=c, что для всех точек $x\neq c$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x)<f(c)$.

В точке x_2 значение функции меньше всех «соседних» значений. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум. В точке x_4 функция, очевидно, также имеет минимум.

Функция $y=f(x)$ имеет минимум в точке x=c, если существует такая окрестность точки x=c, что для всех точек $x\neq c$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x)>f(c)$.

Максимум и минимум объединяются общим названием *экстремум* функции. Следует отметить, что если функция имеет в точке максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее значение во всей области ее определения. Из определения максимума следует только то, что это самое большое значение функции в точках, достаточно близких к точке *c*. Так, на рисунке 3.4 функция в точке x_1 имеет максимум, хотя существуют точки, в которых значения функции больше, чем в точке x_1. Аналогичное замечание можно сделать относительно минимума функции. В частности, может оказаться, что минимум функции больше максимума (см. значения функции в точках x_1 и x_4 на рисунке 3.4).

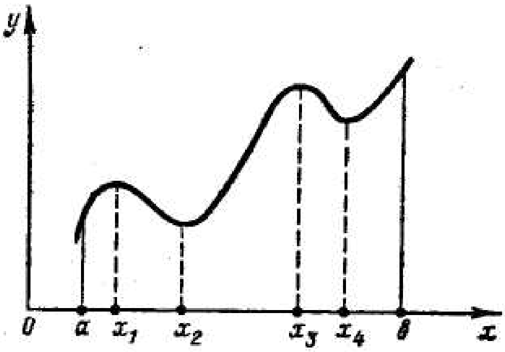


Рис. 4.4

Т е о р е м а (необходимый признак существования экстремума функции). *Если дифференцируемая в точке x=c функция* $y=f(x)$ *имеет в этой точке максимум или минимум, то ее производная при x=c обращается в нуль, т.е.* $f'(c)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, функция $y=f(x)$ имеет в точке c максимум. Согласно определению максимума, должна существовать такая окрестность точки c, что для всех точек $x(x\neq c)$ этой окрестности $f(x)<f(c)$, т.е. $f(c)$ - наибольшее значение функции в этой окрестности. Так как по условию функция имеет в точке c производную $f'(c)$, то по теореме Ферма должно быть $f'(c)=0$.

Подобным же образом доказывается теорема и для случая минимума функции.

До сих пор рассматривался только случай, когда функция $y=f(x)$ имела производную в точке экстремума. Могут, однако, встретиться случаи, когда в точках экстремума функция не имеет производной.

Так, например, для функции $f(x)=|x|$, график которой изображен на рисунке 4.5, в точке $x=0$ не существует производной. Но очевидно, что в точке $x=0$ функция имеет минимум.

Для функции $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, график которой изображен на рисунке 4.9, производная $f'(x)=-2\left(3\sqrt[3]{x}\right)$ при $x=0$ не существует (претерпевает бесконечный разрыв). Несмотря на это, функция при $x=0$ имеет максимум.

Рассмотренные примеры позволяют дополнить сформулированный необходимый признак существования экстремума следующим образом.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ *имеет в точке x=c экстремум, то производная функции* $f'(x)$ *обращается в этой точке в нуль или не существует.*

Следует отметить, что условие $f'(c)=0$ (или $f'(c)$не существует), будучи необходимым для существования экстремума, не является достаточным.

Например, для функции $f(x)=x^3$ производная $f'(x)=3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, однако при $x=0$ функция не имеет экстремума (рис. 4.5).

Значение аргумента $x=c$, при котором производная обращается в нуль или терпит разрыв (в частности, обращается в бесконечность), называется *критическим (критической точкой).*

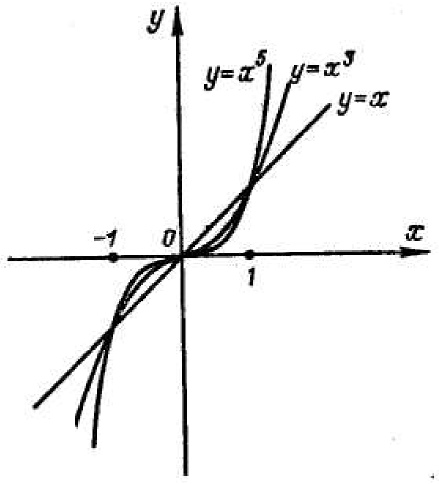


Рис. 3.5

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако, как мы видели, не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

Рассмотрим теперь так называемые д о с т а т о ч н ы е условия существования экстремума, обеспечивающие его наличие в критической точке.

Предварительно условимся для дальнейшего, в тех случаях, когда производная слева от критической точки имеет один знак, а справа от нее – другой знак, говорить, что *производная при переходе через критическую точку меняет знак.*

Т е о р е м а (д о с т а т о ч н ы й п р и з н а к с у щ е с т в о в а н и я э к с т р е м у м а). *Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку $x=c$ (за исключением, может быть, самой той точки) и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку $x=c$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть c – критическая точка и пусть, для определенности, при переходе аргумента через точку c производная меняет знак с плюса на минус, т.е. слева от c производная положительна, а справа от c – отрицательна. Это значит, что существует достаточно малое число $h>0$ такое, что $f'(x)>0$, если $c-h<x<c$, и $f'(x)<0$, если $c<x<c+h$.

На основании теорем о возрастании и убывании функции заключаем, что $f(x)$ возрастает на сегменте $[c-h,\ c]$ и убывает на сегменте $[c,\ c+h]$.

Следовательно, значение функции в точке c больше, чем ее значения во всех остальных точках сегмента $[c-h,\ c+h]$, а это и означает, что в точке c функция имеет максимум.

Аналогично доказывается теорема и в случае минимума (рис. 4.6).

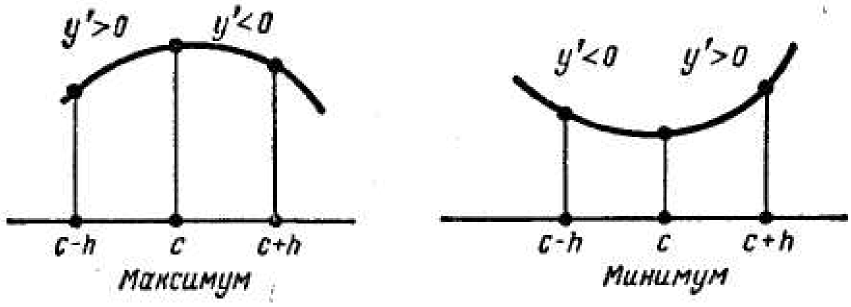


Рис. 3.6

З а м е ч а н и е. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Пример 3.2. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную: $f'(x)=x^2-4x+3$.

2. Приравниваем производную к нулю и находим корни полученного уравнения (критические точки):

$$x^2-4x+3=0;\ \ x_1=1,\ \ x_2=3.$$

Эти числа разбивают всю область определения данной функции на три интервала: $-\infty<x<1,\ \ 1<x<3,\ \ 3<x<+\infty$.

3. В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак (так как смена знака может произойти только при переходе через критическую точку). Поэтому при исследовании знака производной в каждом интервале достаточно взять любую точку этого интервала.

В интервале $-\infty<x<1$ берем, например, точку x=0. В этой точке $f'(0)=0^2-4\cdot 0+3=3>0$. Поэтому во всем интервале $-\infty<x<1$ производная положительна.

Аналогично находим, что в интервале $1<x<3$ производная отрицательна, а в интервале $3<x<+\infty$ производная положительна.

Так как при переходе через критическую точку x=1 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Вычисляем его:

$$y_{\max}=f(1)=1/3-2+3+1=7/3.$$

При переходе через точку x=3 производная меняет знак с минуса на плюс, а следовательно, в этой точке функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(3) = 1/3 \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

Полученные результаты запишем в таблицу:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < +\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	возрастает	максимум $y_{\max} = 7/3$	убывает	минимум $y_{\min} = 1$	возрастает

График функции изображен на рисунке 3.7.

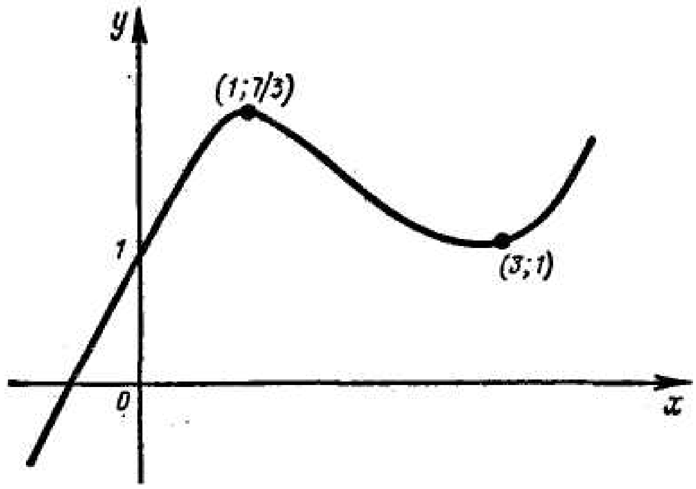


Рис. 3.7

Пример 3.3. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = xe^x$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную $f'(x) = e^x(x+1)$.

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной:

$$f'(x) = 0, \;\; e^x(x+1) = 0, \;\; x = -1.$$

Это число разбивает всю область определения функции на два интервала: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +\infty$.

3. Исследуем знаки производной в каждом из этих интервалов.

В интервале $-\infty < x < -1$ берем, например, значение $x = -2$, тогда $f'(-2) = e^{-2}(-2+1) = -1/e^2 < 0$.

В интервале $-1 < x < +\infty$ для значения x=0 имеем: $f'(0) = e^0(0+1) = e^0 = 1 > 0$.

Так как при переходе через точку x=-1 производная меняет знак с минуса на плюс, то при x=-1 функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(-1) = -e^{-1} = -1/e \approx -0{,}37.$$

Полученные данные запишем в таблицу:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < +\infty$
y'	-	0	+
y	убывает	минимум $y_{\min} = -1/e \approx -0{,}37$	возрастает

График функции $y = xe^x$ изображен на рисунке 3.8.

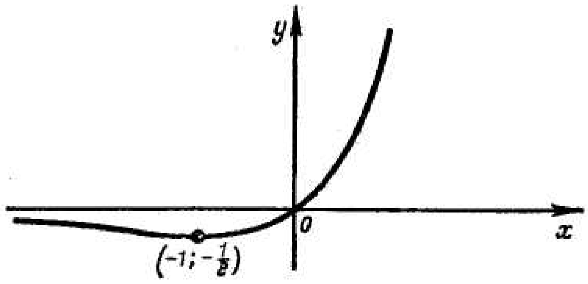


Рис. 3.8

3.3. Достаточный признак существования экстремума

В некоторых случаях при исследовании функции на экстремум оказывается удобным следующий достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной.

Т е о р е м а. *Пусть в точке x=c первая производная функции* $f(x)$ *равна нулю* $[f'(c) = 0]$, *а вторая производная существует и отлична от нуля* $[f''(c) \neq 0]$. *В таком случае, если* $f''(c) < 0$, *то в точке x=c функция имеет максимум; если же* $f''(c) > 0$, *то в точке x=c функция имеет минимум.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f''(c) < 0$. Покажем, что в точке c функция имеет максимум. На основании определения второй производной имеем

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}.$$

Так как по условию $f'(c) = 0$, то

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $f''(c) < 0$, *получаем* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0$. Поскольку предел отрицателен, для малых по абсолютной величине значений Δx выполняется неравенство $\frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0$.

Пусть $\Delta x < 0$; тогда $f'(c + \Delta x) > 0$; если же $\Delta x > 0$, то $f'(c + \Delta x) < 0$. Это показывает, что при переходе через точку c первая производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, на основании достаточного признака существования экстремума, функция $f(x)$ имеет в точке c максимум. Аналогично доказывается, что если $f''(c)>0$, то в точке c функция имеет минимум.

Пример 3.4. Найти экстремумы функции $f(x)=x-2\sin x$ на сегменте $[0,\ 2\pi]$.

Решение. 1. Находим производную $f'(x)=1-2\cos x$.

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной, принадлежащей данному сегменту:

$$1-2\cos x=0,\quad \cos x=1/2,\ x_1=\pi/3,\ x_2=5\pi/3.$$

3. Находим вторую производную $f''(x)=2\sin x$ и определяем ее знак в точках $x_1=\pi/3,\ x_2=5\pi/3$. В точке $x_1=\pi/3$ имеем: $f''(\pi/3)=2\sin(\pi/3)=\sqrt{3}>0$. В точке $x_2=5\pi/3$ имеем: $f''(5\pi/3)=2\sin(5\pi/3)=-\sqrt{3}<0$.

Следовательно, в точке $x_1=\pi/3$ функция имеет минимум:

$$y_{\min}=f(\pi/3)=\pi/3-2\sin(\pi/3)=\pi/3-\sqrt{3}\approx-0{,}68,$$

а в точке $x_2=5\pi/3$ - максимум:

$$y_{\max}=5\pi/3-2\sin(5\pi/3)=5\pi/3+\sqrt{3}\approx 6{,}96.$$

В тех случаях, когда в критической точке вторая производная обращается в нуль или не существует, второй достаточный признак существования экстремума неприменим. В этих случаях приходится пользоваться достаточным признаком, основанным на перемене знака первой производной.

Пример 3.5. Найти экстремумы функции $f(x)=x^4$.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную $f'(x)=4x^3$.

2. Приравниваем производную нулю и находим ее корни:

$$f'(x)=0,\ 4x^3=0,\ x=0.$$

3. Находим вторую производную $f''(x)=12x^2$. В критической точке x=0 вторая производная тоже обращается в нуль. В этом случае рассмотренный достаточный признак не применим. Применяя первый достаточный признак , основанный на смене знака первой производной, убеждаемся, что при x=0 функция имеет минимум, так как при переходе через точку x=0 первая производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 3.9).

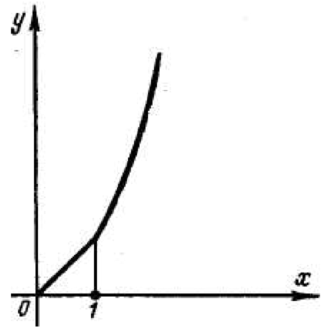


Рис. 3.9

3.4. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную на сегменте $[a,\ b]$. Как известно, такая функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо на границе сегмента, либо внутри него. Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается во внутренней точке c сегмента, то это значение является максимумом (или минимумом) функции, так как неравенство $M=f(c)\geq f(x)$ (или $m=f(c)\leq f(x)$), имеющее место для всех точек x сегмента $[a,\ b]$, выполняется и для любой окрестности точки c, лежащей внутри сегмента $[a,\ b]$ (см. рис. 4.6).

Таким образом, получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на сегменте $[a,\ b]$.

1. Находим все критические точки функции в интервале (a,b) и вычисляем в них значения функции.
2. Вычисляем значение функции на концах сегмента – в точках $x=a$ и $x=b$.
3. Из всех этих значений выбираем наибольшее и наименьшее.

З а м е ч а н и е. Очевидно, если непрерывная на сегменте функция имеет во внутренней точке этого сегмента только один экстремум, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее – в случае минимума.

Пример 3.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x$ на сегменте $[-1{,}5;\ 2{,}5]$.

Решение. 1. Находим критические точки функции в интервале $(-1{,}5;\ 2{,}5)$:

$$f'(x)=3x^2-3,\ 3x^2-3=0,\ x_1=-1,\ x_2=1.$$

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2,\ f(1)=1-3=-2.$$

2. Вычисляем значения функции на концах сегмента:

$$f(-1{,}5)=(-1{,}5)^3-3(-1{,}5)=1{,}125;\ \ f(2{,}5)=2{,}5^3-3\cdot 2{,}5=8{,}125.$$

Таким образом, наибольшее значение функции $y_{наиб} = 8{,}125$ достигается на правом конце сегмента. Наименьшее значение функции $y_{наим} = -2$ достигается в точке x=1.

3.5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Изучим теперь некоторые свойства графика функции, связанные с понятиями выпуклости и вогнутости.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в интервале $(a,\ b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (рис. 3.10).

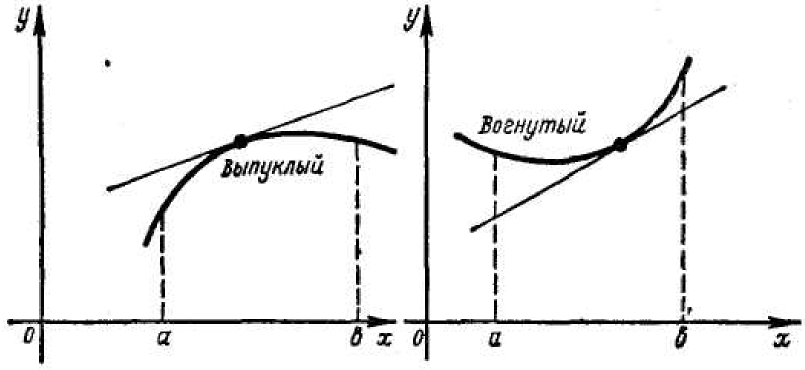


Рис. 3.10

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* в интервале $(a,\ b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале (рис. 3.11).

Так, например, полуокружность $y = \sqrt{1-x^2}$ выпукла в интервале $(-1,\ 1)$, парабола $y = x^2$ вогнута в интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

График функции в одних интервалах может быть выпуклым, а в других – вогнутым. Например, график функции $y = \sin x$, рассматриваемый в интервале от 0 до 2π, выпуклый в интервале $(0,\ \pi)$ и вогнутый в интервале $(\pi,\ 2\pi)$ (рис. 3.11).

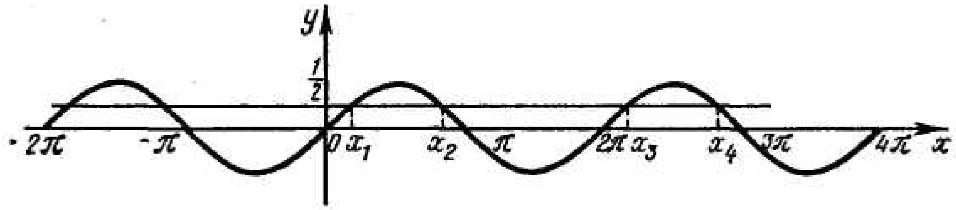


Рис. 3.11

Рассмотрим теперь достаточный признак, позволяющий установить, является ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Т е о р е м а. *Пусть функция* $y=f(x)$ *имеет вторую производную* $f''(x)$ *во всех точках интервала* (a,b). *Если во всех точках этого интервала* $f''(x)<0$, *то график функции в этом интервале выпуклый, если же* $f''(x)>0$ - *вогнутый.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим для определенности, что $f''(x)<0$, и докажем, что график будет выпуклым. Возьмем на графике функции произвольную точку M_0 с абсциссой x_0, принадлежащей интервалу (a,b), и проведем через точку M_0 касательную (рис. 3.12). Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции в интервале (a,b) расположен ниже этой касательной. Другими словами, мы должны показать, что для одной и той же абсциссы x ордината кривой меньше ординаты касательной.

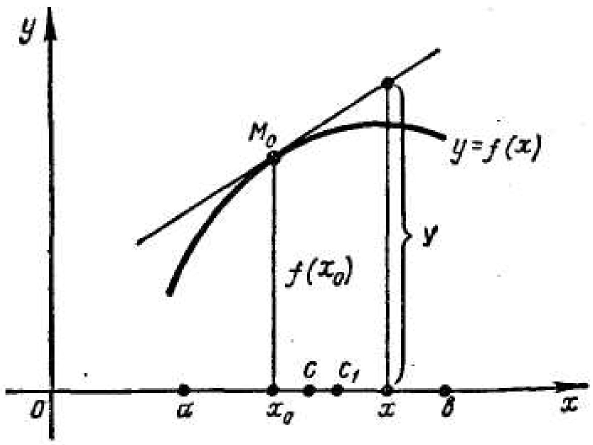


Рис. 3.12

Уравнение графика $y=f(x)$; уравнение касательной в точке M_0 имеет вид

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Здесь через Y обозначена ордината касательной, соответствующая абсциссе x.

Разность ординат графика и касательной при одной и той же абсциссе x равна

$$y-Y=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right],$$

или

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Разность $f(x)-f(x_0)$ преобразуем по формуле Лагранжа :

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(c),$$

где c заключено между x_0 и x. Тогда

$$y-Y=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(x-x_0)\left[f'(c)-f'(x_0)\right]. \qquad (3.1)$$

Разность $f'(c)-f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа, применяя ее к производной $f'(x)$:

$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0) f''(c_1),$$

где c_1 заключено между x_0 и c, а следовательно, между x_0 и x. Подставляя выражение для разности в равенство (4.1), получим $y - Y = (x - x_0)(c - x_0) f''c_1$. Разности $x - x_0$ и $c - x_0$ имеют одинаковый знак, так как c заключено между x_0 и x; следовательно, их произведение $(x - x_0)(c - x_0) > 0$. Так как по условию $f''(x) < 0$ в интервале (a, b), то, в частности, $f''(c_1) < 0$. Поэтому $y - Y = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1) < 0$. Итак, доказано, что для всех точек интервала (a, b) ордината касательной больше ординаты графика, т.е. график выпуклый.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график вогнутый. Точка графика непрерывной функции, определяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба.*

Нахождение точек перегиба графика функции основано на следующих теоремах.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе через x_0, то точка с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба графика функции.*

Доказательство. Пусть, например, $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. В этом случае слева от x_0 график выпуклый, а справа от x_0 - вогнутый. Следовательно, точка x_0 определяет интервал выпуклости от интервала вогнутости, т.е. точка $(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба (рис. 3.13).

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале (a, b) непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если точка с абсциссой $x_0 \in (a, b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.*

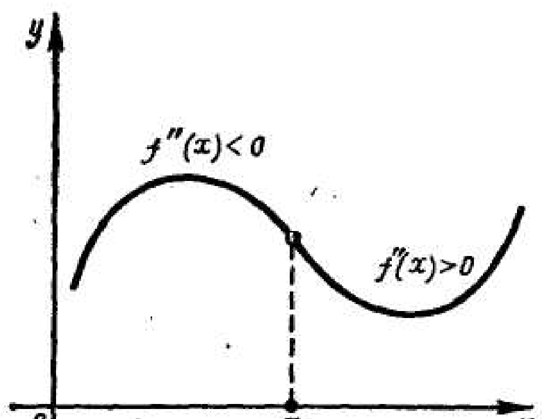


Рис. 3.13

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. что $f''(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу предположения о непрерывности второй производной она является положительной в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, график функции в этой окрестности вогнутый. Но это противоречит тому, что x_0 есть абсцисса точки перегиба. Полученное противоречие показывает, что $f''(x_0) = 0$.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба с абсциссой $x = x_0$. Если при $x = x_0$ вторая производная непрерывна, то $f''(x_0) = 0$. Однако могут встретиться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции разрывна (в частности, не существует).

Так, например, для функции $y = \sqrt[3]{x^5}$ вторая производная $y'' = 10\Big/\left(\sqrt[3]{x}\right)$. Очевидно, что $y'' < 0$ при $-\infty < x < 0$ и $y'' > 0$ при $0 < x < +\infty$. Следовательно, график данной функции имеет точку перегиба при $x = 0$. Однако в этой точке вторая производная не существует.

Таким образом, *абсциссы точек перегиба графика непрерывной функции следует искать среди тех точек, в которых вторая производная или равна нулю, или разрывна (в частности, не существует).*

Пример 3.7. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $f(x) = x^3 - 3x$.

Решение. Находим вторую производную: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Приравниваем $f''(x)$ нулю: $6x = 0$, откуда $x = 0$. Замечая, что если $x < 0$, то $f''(x) = 6x < 0$, а если $x > 0$, то $f''(x) = 6x > 0$, заключаем, что в интервале $(-\infty,\ 0)$ график выпуклый, а в интервале $(0,\ +\infty)$ - вогнутый: при $x = 0$ график функции имеет точку перегиба.

3.6. Асимптоты графика функции

При исследовании функции важно установить форму ее графика при неограниченном удалении точки графика от начала координат или, как говорят, при удалении его переменной точки в бесконечность.

Особый интерес представляет случай, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат.

Рассмотрим отдельно случай асимптот, параллельных оси *Oy* и не параллельных оси *Oy*.

А с и м п т о т ы, п а р а л л е л ь н ы е о с и *Oy*. Путь при $x \to x_0 - 0$ функция $y = f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$. Тогда из определения следует, что прямая $x = x_0$ есть асимптота (рис. 4.14).

Аналогично, прямая $x = x_0$ является асимптотой, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Очевидно и обратное: если прямая $x = x_0$ асимптота, хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен.

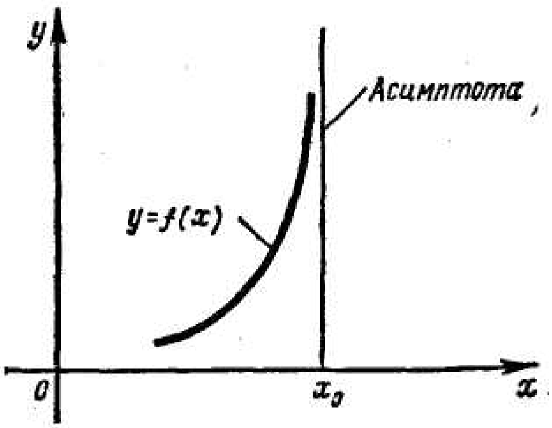


Рис. 3.14

Таким образом, для отыскания асимптот графика функции $y = f(x)$, параллельных оси *Oy*, надо найти те значения $x = x_0$, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв). Тогда асимптота, параллельная оси *Oy*, имеет уравнение $x = x_0$.

Пример 3.8. Найти асимптоту графика функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x-2}$, параллельную оси *Oy*.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}\left(x + \dfrac{1}{x-2}\right) = \infty$, то прямая $x = 2$ есть асимптота.

Пример 3.9. Найти асимптоты графика функции $f(x) = tgx$, параллельные оси *Oy*.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to \pi(2m+1)/2} tgx = \infty$, то график этой функции имеет бесчисленное множество асимптот: $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$, $x = 5\pi/2$, …, $x = -\pi/2$. $x = -3\pi/2$, $x = -5\pi/2$, …. (рис. 4.15).

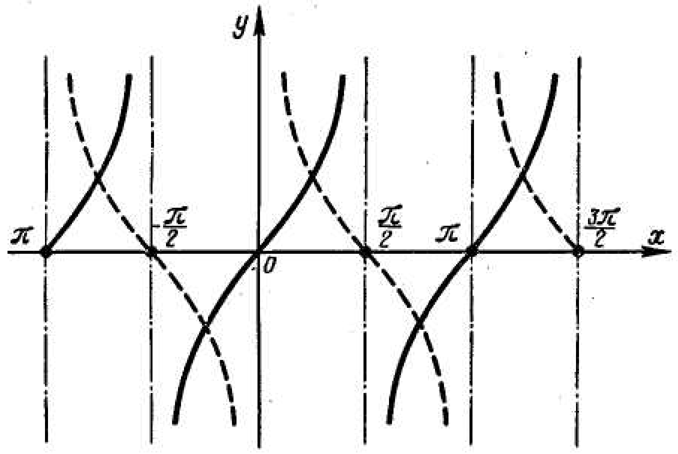


Рис. 3.15

А с и м п т о т ы, не п а р а л л е л ь н ы е о с и *Oy*. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту, не параллельную оси *Oy*. Тогда уравнение такой асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Для определения k и b поступим следующим образом. Опустим из точки M графика функции на асимптоту перпендикуляр MN (рис. 3.16).

Из определения асимптоты следует, что при $x \to +\infty$ длина $MN \to 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$. Из треугольника M_1MN имеем: $M_1M = MN/\cos\alpha$, где α - угол наклона асимптоты к оси *Ox*. Поскольку α постоянно, величина M_1M стремится к нулю одновременно с MN, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} M_1M = 0$.

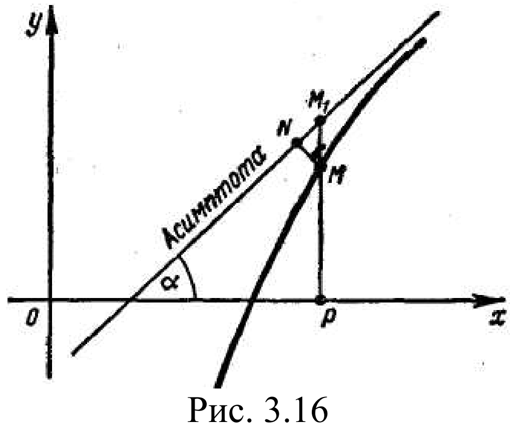


Рис. 3.16

Так как

$$M_1M = PM_1 - PM = y_{асимпт} - y_{графика} = (kx+b) - f(x), \text{ то}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(kx+b) - f(x)\right] = 0. \qquad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что разность, стоящая в квадратных скобках, есть бесконечно малая функция при $x \to +\infty$: $f(x) - (kx+b) = \beta(x)$. Разделим последнее равенство почленно на x и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{x}=0$, то имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k\right]=0$. Отсюда угловой коэффициент асимптоты

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{3.3}$$

Определим теперь *b*. Так как $f(x)-kx-b=\beta(x)$, то $b=f(x)-kx-\beta(x)$. Переходя к пределу при $x\to+\infty$, получим

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]. \tag{3.4}$$

Здесь *k* находится по формуле (3.3).

Таким образом, для нахождения асимптоты, не параллельной оси *Oy*, надо найти пределы (3.3) и (3.4). Можно показать, что и обратно, если пределы (3.3) и (3.4) существуют, то прямая $y=kx+b$ есть асимптота.

Если хотя бы один из этих пределов не существует, то график функции $y=f(x)$ асимптоты при $x\to+\infty$ не имеет.

В частном случае коэффициент *k* в уравнении асимптоты может равняться нулю. В этом случае асимптота параллельна оси *Ox* и называется *горизонтальной.*

Аналогично находятся асимптоты при $x\to-\infty$. Заметим, что пределы вида (3.3) и (3.4) могут быть различными при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, т.е. график функции может иметь две различные асимптоты, не параллельные оси *Oy*, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Пример 3.10. Найти асимптоты графика функции $y=x-2arctgx$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Следовательно, асимптот, параллельных оси *Oy*, график не имеет.

Находим асимптоты, не параллельные оси *Oy*.

$$1)\ x\to+\infty;\ k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2arctgx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2arctgx}{x}\right)=$$

$$=1-2\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2arctgx-x\right)=-2\lim_{x\to+\infty}arctgx=-2\cdot\pi/2=-\pi.$$

Итак, при $x\to+\infty$ уравнение асимптоты $y=x-\pi$.

$$2)\ x\to-\infty;\ k=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2arctgx}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2arctgx}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(x-2arctgx-x\right)=-2\lim_{x\to-\infty}\left(arctgx\right)=-2\left(-\pi/2\right)=\pi.$$

При $x\to-\infty$ уравнение асимптоты $y=x+\pi$.

Таким образом, график функции $y=x-2arctgx$ имеет две различные асимптоты, не параллельные оси *Oy*: $y=x-\pi$ при $x\to+\infty$; $y=x+\pi$ при $x\to-\infty$. График функции $y=x-2arctgx$ показан на рисунке 3.17.

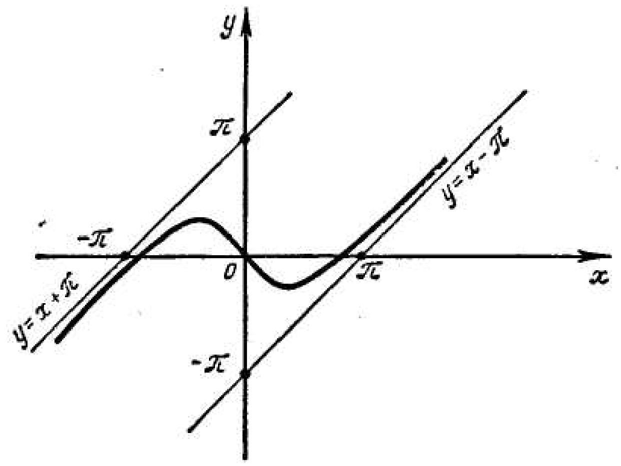


Рис. 3.17

3.7. Общая схема исследования функции и построение ее графика

На основании вышеизложенного можно рекомендовать следующий план исследования функций.

1. Нахождение области определения функции, интервалов непрерывности и точек разрыва.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение интервалов монотонности функции и ее экстремумов (максимумов и минимумов).
4. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.
5. Построение графика функции.

Замечание 1. При построении графика функции полезно знать также точки пересечения графика с осями координат.

Замечание 2. Перед построением графика полезно также установить, не является ли данная функция четной или нечетной. При построении графика четной или нечетной функции рекомендуется использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

Пример 3.11. Исследовать функцию $f(x)=2x-3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна для всех значений x.

2. Находим асимптоты графика функции, не параллельные оси Oy:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-3\sqrt[3]{x^2}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-3\sqrt[3]{x^2}\right)=-\infty.$$

Так как для b не существует конечного предела, то график функции асимптот, не параллельных оси Oy, при $x\to+\infty$ не имеет. Легко проверить, что и при $x\to-\infty$ график функции также не имеет асимптот, не параллельных оси

Oy. Асимптот, параллельных оси Oy, также нет, так как функция $2x-3\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна при всех значениях x.

3. Определяем интервалы монотонности функции, максимумы и минимумы.

Находим производную $f'(x)=2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Определим критические значения аргумента:

$$2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=0, \text{ или } \frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}}=0,\ \sqrt[3]{x}-1=0,\ x=1.$$

Кроме того, так как при $x=0$ производная терпит бесконечный разрыв, то значение $x=0$ также является критическим.

Определяем знаки производной в каждом из интервалов $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$, на которые точки 0 и 1 разбивают всю область определения данной функции. Имеем:

$(-\infty,\ 0)$: $f'(-1)>0$; $(0,\ 1)$: $f'(1/8)<0$; $(1,\ +\infty)$: $f'(8)>0$.

Составляем таблицу

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<+\infty$
y'	+	не сущ.	-	0	+
у	возрастает	максимум $y_{\max}=0$	убывает	минимум $y_{\min}=-1$	возрастает

Таким образом,

$$y_{\max}=f(0)=0,\ \ y_{\min}=f(1)=-1.$$

4. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

Находим вторую производную

$$f''(x)=-2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}=\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$f''(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x, но при $x=0$ не существует (имеет бесконечный разрыв).

Определяем знаки второй производной в каждом из интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$ и составляем таблицу

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<+\infty$
y''	+	не существует	+
график	вогнут	перегиба нет	вогнут

Находим точки пересечения графика с осями координат:

$f(x)=0$, $2x-3\sqrt[3]{x^2}=0$, $8x^3-27x^2=0$, $x_1=x_2=0$, $x_3=27/8$.

При построении графика необходимо иметь в виду, что $f'(x)\to\infty$, при $x\to 0$, т.е. в начале координат график имеет вертикальную касательную (рис. 3.18).

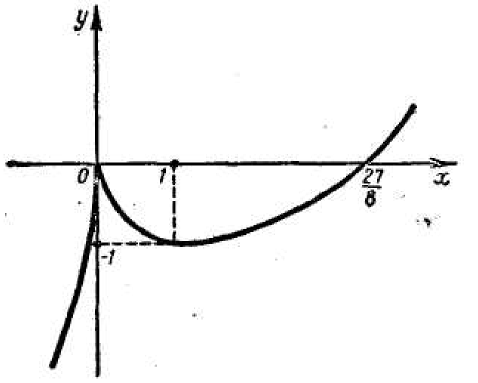


Рис. 3.18

4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Функция двух переменных и ее область определения

Итак, *функцией двух переменных называется правило, по которому каждой паре чисел* $(x;\, y) \in M$ *соответствует единственное число* $z \in L$ при условии, что каждое число $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x;\, y) \in M$, где под множеством M понимается некоторое множество пар $(x;\, y)$ действительных чисел, а под множеством L – некоторое множество действительных чисел.

При этом x и y называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), z – *зависимой переменной,* множество M – *областью определения* функции, а L – *множеством значений* функции. Как и в случае одной переменной, зависимую переменную также называют функцией (как и само правило соответствия).

Обозначения функции двух переменных аналогичны обозначениям функции одной переменной: $z = f(x,\, y)$, $z = \varphi(x,\, y)$, $z = z(x,\, y)$ и т.д.

Пример 4.1. Найти область определения функции $z = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$.

Решение. Функция задана только с помощью формулы. Областью определения этой функции является множество всех тех точек, для которых выражение $\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$ определено, т.е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 > 0$, или $x^2 + y^2 < 1$. Так как выражение $x^2 + y^2$ представляет собой квадрат расстояния точки $P(x;\, y)$ от начала координат, то в область определения данной функции войдут только те точки, расстояние которых от начала координат меньше единицы. Множество всех таких точек образует внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 4.1).

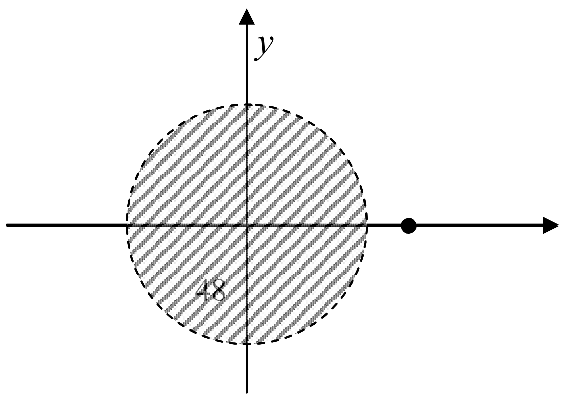


Рис. 4.1

5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

5.1. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зафиксируем значение одного из ее аргументов, например *y*, положив $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ есть функция одной переменной *x*. Пусть она имеет производную в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Эта производная называется *частной производной первого порядка* функции $z = f(x, y)$ по *x* в точке $P_0(x_0; y_0)$ и обозначается символом $f'_x(x_0, y_0)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется *частным приращением по x* функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \qquad (5.2)$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \qquad (6.3)$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции $z = f(x, y)$ по *y* и частная производная по *y* в точке $P_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (5.2')$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \qquad (5.3')$$

Таким образом, *частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Значение частной производной зависит от точки $P(x; y)$, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, есть функция точки $P(x; y)$, т.е. также является функцией двух переменных *x* и *y*.

Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются следующим образом*:

$$f'_x(x, y), f'_y(x, y), \text{ или } z'_x, z'_y, \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

---

* Заметим, что в отличие от производной функции одной переменной выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ нельзя рассматривать как дроби. Эти выражения являются символами, обозначающими частные производные.

Частные приращения и частные производные функции n переменных при $n>2$ определяются и обозначаются аналогично. Например, для функции трех переменных $u=f\left(x,\, y,\, z\right)$ частное приращение по x в точке $P_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ получится, если x получит приращение Δx, а остальные аргументы останутся неизменными:

$$\Delta_x u=f\left(x_0+\Delta x,\, y_0,\, z_0\right)-f\left(x_0,\, y_0,\, \mathrm{z}_0\right).$$

Частная производная функции $u=f\left(x,\, y,\, z\right)$ по аргументу x в точке $P_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ равна

$$u'_x\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных. Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Пример 5.1. Найти частные производные функции $z=f\left(x,\, y\right)=x^2y-3y^2+5x$.

Решение. Частную производную $f'_x(x,\, y)$ находим как производную функции $f\left(x,\, y\right)$ по аргументу x в предположении, что $y=const$. Поэтому

$$f'_x(x,\, y)=\left(x^2y-3y^2+5x\right)'_x=2xy-0+5=2xy+5.$$

Аналогично

$$f'_y(x,\, y)=\left(x^2y-3y^2+5x\right)'_y=x^2-6y+0=x^2-6y.$$

Пример 5.2. $f\left(x,\, y\right)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$. Найти $f'_x(3,\; 4)$.

Решение. Находим сначала частную производную функции $f\left(x,\, y\right)$ по x:

$$f'_x(x,\, y)=\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\left(x+y\right)'_x-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=$$

$$=1+0-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Теперь вычислим частное значение найденной частной производной при $x=3\;\; y=4$:

$$f'_x(3,\; 4)=\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{\substack{x=3\\ y=4}}=1-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}.$$

5.2. Частные производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются *вторыми частными производными* (или *частными производными второго порядка*) исходной функции.

Так, например, функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Функция $u = f(x, y, z)$ трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y, z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x, y, z)$$

и т.д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: *частной производной n-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (n-1)-го порядка той же функции.*

Например, частная производная третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функции $z = f(x, y)$ есть частная производная первого порядка по y от частной производной второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется *смешанной частной производной.*

Например, частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$$

являются смешанными частными производными функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Пример 5.3. Найти смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \left(2xy^3\right)'_y = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \left(3x^2 y^2\right)'_x = 6xy^2.$$

Мы видим, что смешанные частные производные данной функции $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, отличающиеся между собой лишь порядком дифференцирования, т.е. последовательностью, которой производится дифференцирование по различным переменным, оказались тождественно равными. Этот результат не случаен. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

Т е о р е м а. *Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.*

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

6. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Понятия максимума и минимума для функции нескольких переменных вводятся так же, как и для функции одной переменной. Мы рассмотрим эти понятия только в применении к функции двух переменных.

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана в некоторой области G. Введем следующие определения.

Функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ *имеет в точке* $P_0(x_0; y_0)$ *области G максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек* $P(x, y)$ *этой окрестности, отличных от* P_0, *выполняется неравенство* $f(P_0) > f(P)$.

Функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ *имеет в точке* $P_0(x_0; y_0)$ *области G минимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек* $P(x, y)$ *этой окрестности, отличных от* P_0, *выполняется неравенство* $f(P_0) < f(P)$. Точка P_0, в которой функция $z = f(P)$ имеет максимум (или минимум), называется *точкой максимума* (или *точкой минимума*).

Как и в случае функции одной переменной, точку максимума (или минимума) не следует смешивать с точкой, в которой функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение в области G.

Существует общее название для максимума и минимума – *экстремум.*

Теорема (необходимый признак существования экстремума). *Если* $P_0(x_0; y_0)$ *есть точка экстремума функции* $z = f(x, y)$, *то*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

в предположении, что указанные частные производные существуют в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Доказательство. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по x в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть производная функции одной переменной $\varphi(x) = f(x, y)$ в точке $x = x_0$. Но в этой точке функция $\varphi(x)$ имеет, очевидно, экстремум. Следовательно, $\varphi'(x_0) = 0$. Так как $\varphi'(x_0) = f'_X(x_0, y_0)$, то $f'_X(x_0, y_0) = 0$. Аналогично можно показать, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, обращение в нуль в точке P_0 частных производных первого порядка функции $z = f(x, y)$ (если они существуют) являются необходимым условием существования в точке P_0 экстремума этой функции.

Заметим, что функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, имеет минимум в точке $O(0;0)$, но в этой точке частные производные не существуют.

Точки, в которых первые частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими точками* этой функции.

Из изложенного выше следует, что точки экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако существуют критические точки, не являющиеся точками экстремума.

Рассмотрим, например, функцию $z = f(x, y) = xy$. Первые частные производные этой функции $\frac{\partial z}{\partial x} = y$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ обращаются в нуль в точке $P_0(0;0)$; следовательно, эта точка является критической. Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет.

В самом деле, $z(P_0) = 0$, но в любой окрестности точки $P_0(0;\ 0)$ имеются как положительные (в точках, принадлежащих I и III четвертям), так и отрицательные (в точках, принадлежащих II и IV четвертям) значения функции z.

Рассмотренный пример показывает, что необходимый признак существования экстремума не является достаточным признаком.

Достаточным условием наличия экстремума в критической точке $P_0(x_0;\ y_0)$ является условие

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - \left[f''_{xy}(P_0)\right]^2 > 0,$$

причем в случае $f''_{x^2}(P_0) < 0$ точка P_0 есть точка максимума, а в случае $f''_{x^2}(P_0) > 0$ - точка минимума. Условие

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - \left[f''_{xy}(P_0)\right]^2 < 0$$

является достаточным условием отсутствия экстремума в критической точке P_0.

В случае $\Delta(P_0) = 0$ точка P_0 может быть, а может и не быть точкой экстремума (сомнительный случай). В этом случае необходимы дополнительные исследования.

Сформулированные здесь достаточные признаки существования или отсутствия экстремума мы оставляем без доказательства.

Пример 6.1. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Решение. Находим первые частные производные: $f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $f'_y(x, y) = 6xy - 18$. Приравнивая эти производные нулю, после элементарных преобразований приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10, \\ 2xy &= 6. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (*), получим:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 4. \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= \pm 4, \\ x - y &= \pm 2. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему уравнений (равносильную данной), находим четыре критические точки: $P_1(3;\ 1)$, $P_2(1;\ 3)$, $P_3(-1;\ -3)$ и $P_4(-3,\ -1)$.

Теперь найдем вторые частные производные: $f''_{x^2} = 6x$; $f''_{xy} = 6y$; $f''_{y^2} = 6x$ и составим выражение

$$\Delta(P) = f''_{x^2}(P) \cdot f''_{y^2}(P) - \left[f''_{xy}(P) \right]^2 = 36\left(x^2 - y^2\right).$$

Убеждаемся, что:

1) $\Delta(P_1) > 0$, $f''_{x^2}(P_1) > 0$, P_1 - точка минимума;

2) $\Delta(P_2) < 0$, в точке P_2 экстремума нет;

3) $\Delta(P_3) < 0$, в точке P_3 экстремума нет;

4) $\Delta(P_4) > 0$, $f''_{x^2}(P_4) < 0$, P_4 - точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке P_1 - минимум $f(P_1) = -72$, в точке P_4 - максимум $f(P_4) = 72$.

6.2. Функции нескольких переменных в экономической теории

Рассмотрим некоторые приложения функций нескольких переменных в экономической теории.

Значительная часть экономических механизмов иллюстрируется на рисунках, изображающих линии уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$. Например, линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Пусть x и y — два различных фактора производства, а функция $z = f(x, y)$ характеризует выпуск продукции, который позволяют значения факторов x и y. На рисунке 6.2 линии уровня $f(x, y) = Q$ изображены сплошными линиями, а штриховкой выделена так называемая *экономическая область,* которая характеризуется тем, что высекаемые ею части изоквант представляют собой графики убывающих функции, т.е увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя размера выпуска.

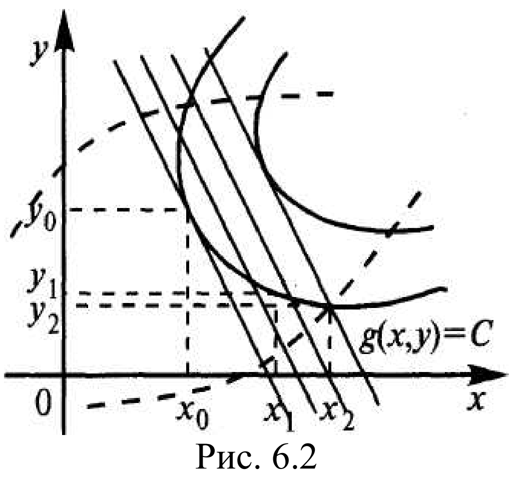


Рис. 6.2

Иными словами, *экономическая область — это множество значений факторов, допускающих замещение одного из них другим.* Очевидно, что все «разумные» значения *x и y* принадлежат экономической области.

Изокванты позволяют геометрически иллюстрировать решение **задачи об оптимальном распределении ресурсов.** Пусть $z = g(x, y)$ — функция издержек, характеризующая затраты, необходимые для обеспечения значений ресурсов x и y (часто можно .считать, что функция издержек линейная: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, где p_x и p_y — «цены» факторов x и y). Линии уровня этой функции также изображены на рис. 6.3. Комбинации линий уровня функции $f(x)$ и $g(x)$ позволяют делать выводы о предпочтительности того или иного значения факторов x и y. Очевидно, например, что пара значений (x_1, y_1) более предпочтительна, чем пара (x_2, y_2), так как обеспечивает тот же выпуск, но с меньшими затратами. Оптимальными же значениями факторов будут значения (x_0, y_0) — координаты точки касания линии уровня функции выпуска и функции издержек.

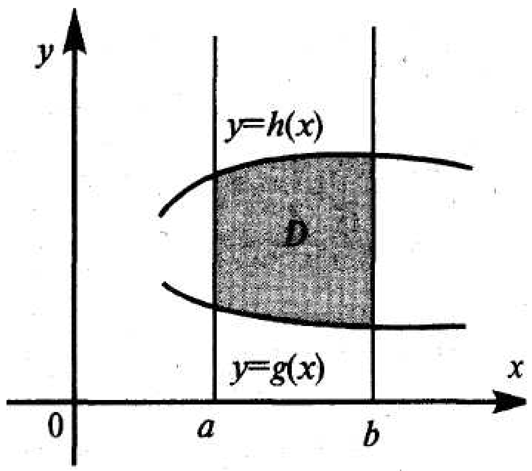


Рис. 6.3

Линии уровня **функции полезности** (они называются *кривыми безразличия*) также позволяют рассматривать вопросы замещения одного товара другим и иллюстрировать решение задачи об оптимальном потреблении (потребительского выбора) (см. рис. 6.4).

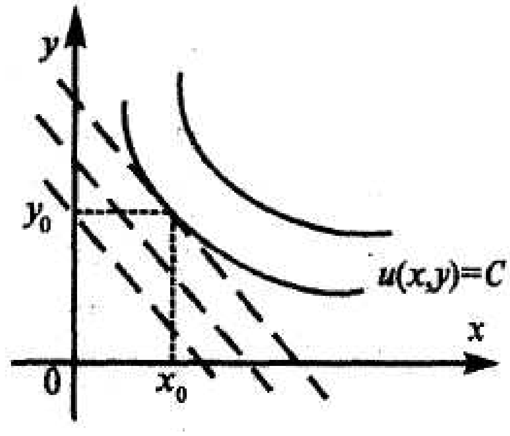


Рис. 6.4

Линия уровня затрат на приобретение товаров *x, y* изображены на рис. 6.4 пунктиром. Оптимальное потребление обеспечивается значениями (x_0, y_0) — координатами точки касания кривой безразличия и линии уровня затрат. В этой точке заданная полезность достигается наиболее экономичным образом.

Другой пример кривых безразличия возникает в **теории инвестиций.**

Портфель ценных бумаг (под портфелем мы здесь будем понимать совокупность определенных ценных бумаг в определенных количествах) характеризуется двумя основными параметрами — ожидаемой доходностью r и риском σ (точное определение этих величин здесь не может быть приведено, так как оно использует понятия теории вероятностей и математической статистики). Каждому портфелю можно поставить в соответствие точку на координатной плоскости $(\sigma,\ r)$, и тогда множество всех возможных портфелей представляет некоторую область D (см. рис. 6.5).

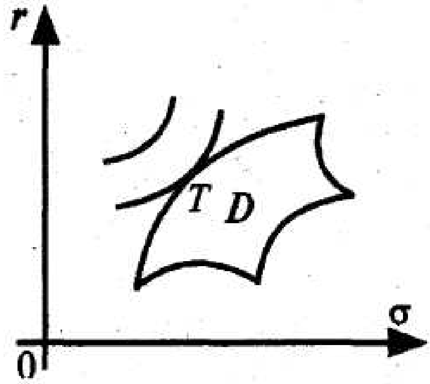


Рис. 6.5

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, кривые безразличия — линии уровня функции предпочтения $U = U(\sigma,\ r)$ — выпуклы вниз. Точка *T,* в которой линия безразличия касается области D соответствует наиболее предпочтительному для данного инвестора портфелю. Соответствующая теория была предложена американским экономистом Харри Марковичем в 1952 г. и с тех пор получила широкое развитие в теории инвестиций.

Понятие частной производной также находит применение в экономической теории. Существует понятие **эластичности функции** одной переменной $E_x(y)$. Аналогично можно ввести понятие *частной эластичности функции* нескольких переменных $z = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ относительно переменной x_i:

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_{x_i} z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i}\right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}.$$

Так, например, в производственной функции Кобба—Дугласа $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$, как нетрудно убедиться, $E_x(z) = b_1$, $E_y(z) = b_2$, т.е. показатели b_1 и b_2 приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда x или только объема производственных фондов y на 1%.

Рассмотрим частные производные $u_x^{'}, u_y^{'}$ — функции полезности. Они называются *предельными полезностями* и обозначаются Mu_x, Mu_y. Если измерять количество товара в стоимостном выражении, то предельные полезности можно рассматривать как функции спроса на соответствующий товар. Найдем предельные полезности для функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1-b_1}x^{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2}y^{1-b_2}.$$

Имеем $Mu_x = a_1 x^{-b_1}$, $Mu_y = a_2 x^{-b_2}$, т.е. функции спроса с ростом стоимости каждого товара являются убывающими, а параметры b_1 и b_2 представляют частные эластичности спроса на эти товары.

Если рассматривать спрос q как функцию нескольких переменных, например двух — цены товара p и доходов потребителей r, т.е. $q = f(p, r)$, то можно говорить о *частных эластичностях спроса от цены* $E_p(q) = \frac{p}{q}q_p^{'}$ и *спроса от доходов* $E_r(q) = \frac{r}{q}q_r^{'}$. Например, можно установить, что $E_r(q) > 0$ для качественных товаров и $E_r(q) < 0$ для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные — уменьшается.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, *альтернативного* товара ценой p_1, т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных $q = f(p, p_1, r)$, **то можно ввести *перекрестный коэффициент эластичности спроса,*** определяемый по формуле $E_{p_1}(q) = \frac{p_1}{q}q_{p_1}^{'}$ и показывающий приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%. Очевидно, что для взаимозаменяемых товаров $E_{p_1}(q) > 0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время для взаимодополняющих товаров $E_{p_1}(q) < 0$, ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

Рассмотрим еще один коэффициент эластичности, характеризующий производственную функцию нескольких переменных и имеющий важное значение для экономической теории.

Пусть $z = f(x, y)$ — производственная функция и $MP(x) = f_x^{'}(x, y)$, $MP(y) = f_y^{'}(x, y)$ — предельные продукты, соответствующие затратам ресурсов x и y. *Коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta\ln\dfrac{x}{y}}{\Delta\ln\dfrac{MP(x)}{MP(y)}}=-\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{MP(x)}{MP(y)}}.$$

Так как при малых приращениях аргумента Δt имеет место пибличенное равенство $\Delta\ln t=\dfrac{\Delta t}{t}$, приращение логарифма переменной величины можно рассматривать как относительное приращение самой величины. Таким образом, *величина, обратная коэффициенту эластичности замещения, показывает приближенно, на сколько процентов изменится отношение предельных продуктов MP*(*x*)*/MP*(*y*) *при изменении отношения затрат ресурсов* (*x/y*) *на* 1*%.*

Выше приведена производственная функция с постоянной эластичностью замещения. В общем случае коэффициент эластичности замещения есть функция от двух переменных. Рассмотрим ее выражение в точках изокванты. Так как вдоль изокванты значение функции $z=f(x,\,y)$ постоянно, то полный дифференциал этой функции $dz=f_x^{'}dx+f_y^{'}dy$ вдоль изокванты равен нулю, т. е. $MP(x)d$ + $MP(y)dy$ = 0. Отсюда имеем $-\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{MP(x)}{MP(y)}$, т.е. при сохранении объема выпуска *z* величина $\left(-\dfrac{dy}{dx}\right)$, называемая *предельной нормой замещения ресурса x ресурсом y,* равна отношению их предельных продуктов. С учетом последнего равенства можно записать, что $\dfrac{1}{\sigma_{xy}}=\dfrac{d\ln\left(-\dfrac{dy}{dx}\right)}{d\ln\dfrac{y}{x}}$.

Очевидно, что $\dfrac{dy}{dx}$ — тангенс угла α наклона касательной к изокванте в точке $M(x,\,y)$, $\dfrac{y}{x}$ — тангенс угла наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M (*x, y*) (рис. 6.6).

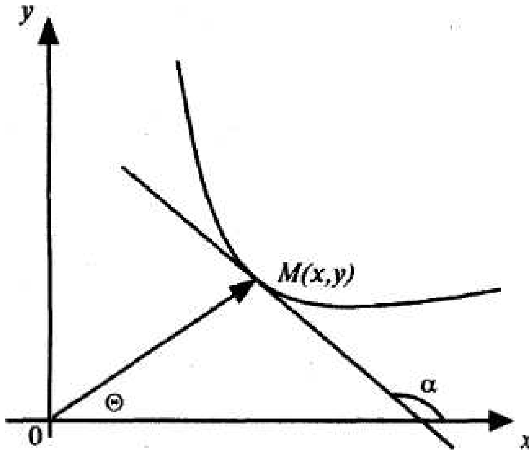


Рис. 6.6

Таким образом, величина $\dfrac{1}{\sigma_{xy}}$ *характеризует относительное изменение угла наклона касательной к изокванте при изменении угла наклона ее радиуса вектора, т.е. кривизну изокванты.*

Если рассматривать $tg\alpha$ как функцию то $\dfrac{1}{\sigma_{xy}}$ есть коэффициент эластичности в обычном смысле.

Понятие **выпуклости функции** также играет существенную роль в понимании важнейших экономических законов. Многомерные аналоги примеров, позволяют математически сформулировать законы убывающей доходности и убывающей предельной полезности.

7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

7.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении мы решали задачу: по данной функции $f(x)$ найти ее производную. Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$. Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение. *Функция* $F(x)$ *называется первообразной функции* $f(x)$ *на интервале* $(a:b)$, *если* $\forall x \in (a:b)$ *выполняется равенство* $F'(x) = f(x)$ *или* $d(F(x)) = f(x)dx$.

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in R$, является функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, т.к. $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^3)' = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$.

Очевидно, что первообразными также будут и функции $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c, \quad c = const$, т.к. $F'(x) = (\dfrac{x^3}{3} + c)' = x^2 = f(x)$.

Т е о р е м а 1. *Если функция* $F(x)$ *является первообразной функции* $f(x)$*, на* $(a:b)$*, то множество всех первообразных для функции* $f(x)$ *задается формулой* $F(x)+c, \quad c=const$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, $(F(x))'=F'(x)=f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ - другая, отличная от $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда $\forall x \in (a:b)$ имеем $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Это означает, что $\Phi(x)-F(x)=C$, где $c=const \Rightarrow \Phi(x)=F(x)+c$. Что и требовалось доказать.

Определение. *Множество всех первообразных функций* $F(x)+c$ *для функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом функции* $f(x)$ *и обозначается* $\int f(x)dx$. Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных кривых» $y=F(x)+c$ (каждому числовому значению c соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной называется интегральной кривой.

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл? Имеет место следующая теорема, утверждающая, что:

Всякая непрерывная на интервале $(a:b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.

7.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств, вытекающих из определения:

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции. $d(\int f(x)dx)=f(x)dx, \quad (\int f(x)dx)'=f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$d(\int f(x)dx)=d(F(x)+c)=d(F(x))+d(c)=F'(x)dx+0=f(x)dx$$

$$(\int f(x)dx)'=(F(x)+c)'=F'(x)+c'=F'(x)=f(x).$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некой функции равен сумме этой функции и производной постоянной $\int d(F(x)) = F(x) + c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$\int af(x)dx = \int aF'(x)dx = \int (aF(x))'dx = \int d(aF(x)) = aF(x) + c_1 = a(F(x) + \frac{c_1}{a}) =$$

$$= a(F(x) + c) = a\int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций.

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть $F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x) \Rightarrow \int (f(x) \pm g(x))dx = \int (F'(x) \pm G'(x))dx =$

$$= \int (F(x) \pm G(x))'dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + c = (F(x) + c_1) \pm (G(x) + c_2) =$$

$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5 (Инвариантность формулы интегрирования).

Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(u)du = F(u) + c$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть x – независимая переменная, $f(x)$ - непрерывная функция и $F(x)$ - ее первообразная. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + c$, положим $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемая функция. Рассматриваем сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$ в силу инвариантности дифференциала функции.

$$d(F(u)) = F'(u)du = f(u)du \Rightarrow \int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + c.$$

Так, например, из формулы $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$, путем замены x на u, получим $\int u^2du=\frac{u^3}{3}+c$, в частности, $\int \sin^2 xd(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}+c$.

$$\int \ln^2 xd(\ln x)=\frac{\ln^3 x}{3}+c.$$

7.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу дифференциалов и свойства неопределенного интеграла. Например, $d(\sin x)=\cos xdx \Rightarrow \int \cos xdx=\int d(\sin x)=\cos x+C.$

Интегралы в приводимой ниже таблице называются табличными. В интегральном исчислении нет универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных функций сводятся к указанию приемов, приводящих данный интеграл к табличному.

1. $\int dx=x+C;$

2. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq 0, n\neq -1;$

3. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

4. $\int e^x dx=e^x+C;$

5. $\int \cos xdx=\sin x+C;$

6. $\int \sin xdx=-\cos x+C;$

7. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a}+C;$

7’. $\int \frac{dx}{x^2+1}=arctgx+C;$

8 $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C;$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

12'. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$

8. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

8.1. Метод непосредственного интегрирования

Данный метод заключается в том, что искомый интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 8.1.

1. $\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx =$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C.$

2. $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx \int \left(\frac{x^3}{2x} + \frac{4x}{2x} + \frac{2}{2x} \right) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x} \right) dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot \int x^2 dx + 2 \cdot \int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln x + C.$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx + tgx + C.$

4. $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} dx = \int (\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}) dx =$

$= \int \frac{\left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \left(x^2 - 1\right) dx + arctgx = \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$

8.2. Интегрирование методом замены переменной (подстановкой)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом искомый интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или приводящимся к нему.

Пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$. Сделаем замену $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$- функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой.

$$\left[\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right].$$

После нахождения интеграла в правой части следует перейти от новой переменной t назад к переменной x.

Пример 8.2.

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx=\begin{bmatrix} \dfrac{x}{4}=t \\ d(\dfrac{x}{4})=dt \\ \dfrac{dx}{4}=dt \\ dx=4dt \end{bmatrix}=\int e^{t}\cdot 4dt=4\cdot\int e^{t}dt=4e^{t}+C=4e^{\frac{x}{4}}+C.$$

Пример 8.3.

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-3}dx=\begin{bmatrix} x^2-3=t \\ d(x^2-3)=dt \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{bmatrix}=\int\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

Пример 8.4.

$$\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{bmatrix} \arcsin x=t \\ d(\arcsin x)=dt \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt \end{bmatrix}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\arcsin^4 x}{4}+c.$$

8.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(u \cdot v) = vdu + udv$. Интегрируя обе части равенства, получим

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv,$$

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

$\left[\int udv = uv - \int vdu \right]$ - формула интегрирования по частям.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *u* и *dv*, затем после нахождения *v* и *du* используется формула интегрирования по частям. Иногда формулу приходится использовать несколько раз.

$$\int \underset{u}{f(x)} \underset{dv}{\varphi(x)dx} = \begin{bmatrix} u = f(x) & dv = \varphi(x)dx \\ du = f'(x)dx & v = \int \varphi(x)dx \end{bmatrix}.$$

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx, \int P(x)a^{kx}dx,$ где P(x) – многочлен, k – число, u=P(x) за dv – все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcctgxdx,$
$\int P(x)\ln xdx,\ P(x)dx = dv,$ за u – все остальные множители.

3. $\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx, u = e^{ax}$ или u=cosbx.

Пример 2.5.

$$\int (2x+1)\cdot e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1, & dv = e^{3x}dx \\ du = 2dx, & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{e^{3x}}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(2x+1)\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{(2x+1)\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}\cdot e^{3x} + C.$$

Пример 8.6.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\int\frac{\sqrt{x}dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

Пример 8.7.

$$\int x^2\cdot 3^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & dv = 3^x dx \\ du = 2xdx & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{bmatrix} = \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\int x\cdot 3^x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & dv = 3^x dx \\ du = dx, & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{bmatrix} = \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx\right) =$$

$$= \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2x\cdot 3^x}{\ln^2 3} + \frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3} + C.$$

Пример 8.8.

$$\int arctgxdx = \begin{bmatrix} u = arctgx, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{bmatrix} = x\cdot arctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ d(1+x^2) = dt \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\ln|t| =$$

$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

9.1. Понятие о рациональных функциях

Формула вида

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$,

$n\in N$, a_n - постоянные коэффициенты, называется многочленом или целой рациональной функцией.

Т е о р е м а 1. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, где $x_1, x_2,...x_n$ - корни многочлена, a_0 - коэффициент при x^n. Множители $x - x_i$ в разложении называются линейными.

Если в разложении какой-либо корень встретится *k* раз, то он называется корнем кратности *k*.

Т е о р е м а 2. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Например, $ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 3x^2 + 1$, тогда $a = 1, b = -3, c = 0, d = 1$.

Т е о р е м а 3. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_r)^{k_r}(a^2 + p_1x + q_1)^{s_1}...(a^2 + p_mx + q_m)^{s_m}.$$

При этом $k_1 + k_2 + ...k_r + 2(s_1 + s_2 + ...s_m) = n$, все квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Например:

1. $x^4 - 1 = (x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)$.
2. $x^3 - 16x = x\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$.

9.1.1. Дробно-рациональная функция

Определение. *Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е.*

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m, $Q_n(x)$ - многочлен степени *n*.

Определение. *Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, m<n, в противном случае ($m \geq n$) дробь называется неправильной.*

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена L(*x*) и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т.е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Пример 9.1. Представить неправильную дробь $\frac{x^4 - 5x + 9}{x + 2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 5x + 9 & x+2 \\ \hline \end{array}$$

$\underline{x^4 + 2x^3} \qquad x^3 - 2x^2 + 4x - 13$

$-2x^3 - 5x + 9$

$\underline{-2x^3 - 4x^2}$

$4x^2 - 5x + 9$

$\underline{4x^2 + 8x}$

$-13x + 9$

$\underline{-13x - 26}$

35

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x + 2} = x^3 - 2x^2 + 4x - 13 + \frac{35}{x + 2}.$$

9.1.2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Правильные рациональные дроби вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{x-a}k$ $(k \geq 2)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(D<0)$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k \geq 2)$, (D<0),

где A, M, N, a, p, q – действительные числа, называют простейшими рациональными дробями I, II, III, IV типов.

Т е о р е м а 4. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$,

можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_1} + ... + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \qquad (3.1)$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + ... + \frac{M_{s_m}x+N_{s_n}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_m}},$$

где $A_1,...B_1,...$, - действительные коэффициенты.

Пример 9.2.

а) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)\cdot(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3}$;

б) $\dfrac{x^3+1}{x^2\cdot(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

в) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Fx+N}{(x^2+x+1)^2}.$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2,...$ в равенстве (3.1) можно применить метод сравнения коэффициентов. Метод заключается в следующем.

1. В правой части равенства (9.1) приведем дроби к общему знаменателю Q(x), в результате получим тождество $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{S(x)}{Q(x)}$. S($x$) – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители - $P(x)\equiv S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 2), в обеих частях равенства получим систему линейных уравнений, из которой определим искомые коэффициенты $A_1, A_2,...$

Пример 9.3. Представить дробь в виде простейших

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}=\frac{A\cdot(x^2-2x+5)+(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}=\frac{x^2\cdot(A+B)+x\cdot(-2A-B+C)+5A-C}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}.$$

$$\begin{cases}A+B=2\\-2A-B+C=-3;\\5A-C=-3\end{cases}\quad\begin{cases}B=2-A\\-2A-B+C=-3;\\C=5A+3\end{cases}\quad\begin{cases}B=2-A\\-2A-2+A+5A+3=-3;\\C=5A+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}B=2-A\\4A=-4\quad;\\C=5A+3\end{cases}\quad\begin{cases}B=3\\A=-1.\\C=-2\end{cases}$$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

9.1.3. Интегрирование простейших рациональных дробей

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=\begin{bmatrix}x-a=t\\d(x-a)=dt\end{bmatrix}=\ln|x-a|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

III. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}dx=\int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx, \text{ причем } a^2-\frac{p^2}{4}>0.$$

Далее делаем подстановку $x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt.$

$$\int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt=\int \frac{Mt-M\cdot\frac{p}{2}+N}{t^2+a^2}dt=M\int \frac{tdt}{t^2+a^2}+(N-M\cdot\frac{p}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+(N-M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+$$

$$+(N-M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C==\frac{M}{2}\ln((x+\frac{p}{2})^2+a^2)+(N-M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Пример 9.4. $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1-1+10}dx=\int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}dx=$

$$=\begin{bmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt=\int \frac{3t-2}{t^2+9}dt=3\int \frac{tdt}{t^2+9}-2\int \frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right|-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+9\right|-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

IV. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ k\geq 2,\ q-\frac{p^2}{4}>0.$

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+(N-\frac{Mp}{2})\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k},\ a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Вычисляем первый интеграл

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\begin{bmatrix} d(t^2+a^2)=2tdt \\ tdt=\dfrac{d(t^2+a^2)}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}+C_1.$$

Вычисляем второй интеграл

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям

$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}=\begin{bmatrix} u=t & dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k} \\ du=dt & v=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2(1-k)}J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого $k>1$.

$$J_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3},\ a=1,\ k=3.$$

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+C.$$

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{t}{2(t^2+1)}=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2(t^2+1)}+C.$$

$$J_3=\frac{3}{4}J_2+\frac{t}{4(t^2+1)^2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2(t^2+1)}\right)+\frac{t}{4(t^2+1)^2}+C.$$

9.1.4. Интегрирование рациональных дробей

Правила интегрирования рациональных дробей.

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби (разделить числитель на знаменатель).

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представим ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 3.5.

1. $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$

$$\begin{array}{r|l} x^5+2x^3+4x+4 & x^4+2x^3+2x^2 \\ \cline{2-2} -\ x^5+2x^4+2x^3 & x\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} -2x^4+4x+4 \\ -2x^4-4x^3-4x^2 \end{array} \\ \hline 4x^3+4x^2+4x+4 \end{array}$$

$$=\int\left(x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$$

$$=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{Ax^3+2Ax^2+2Ax+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{x^3(A+C)+x^2(2A+B+D)+x(2A+2B)+2B}{x^2(x^2+2x+2)}.$$

Найдем коэффициенты *A, B, C, Д* из системы:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+D=4 \\ 2A+2B=4 \\ 2B=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} A+C=4 \\ 2A+2+D=4 \\ A+2=2 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=4 \\ D=2 \\ A=0 \\ D=2 \end{cases}$$

Возвращаемся в решение

$$=\frac{x^2}{2}+2x+2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+1+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx=\begin{bmatrix} x+1=t \\ x+t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4(t-1)+2}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4t-2}{t^2+1}dt=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+2\int\frac{2tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+2\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}-2arctgt=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\ln\left(t^2+1\right)-2arctgt+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\ln\left((x+1)^2+1\right)-2arctg(x+1)+C.$$

10. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

10.1. Универсальная подстановка

Функцию с переменными sin$x$ и cos$x$, над которыми выполняются рациональные действия сложение, вычитание, умножение, деление, принято обозначать R(cos$x$, sin$x$), где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\cos x, \sin x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$, которая называется универсальной.

Действительно,

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2arctgt;\ dx\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Этот способ весьма громоздкий, но всегда приводит к результату.

Например:

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2t+1+t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2t^2+2t+4}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=arctg\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}+C=arctg\frac{2(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}+C.$$

Если $\int R(\cos^{2n}x;\sin^{2m}x)dx$, т. е. функции синуса и косинуса входят в интеграл в четных степенях, то применяют подстановку $tgx=t$, тогда

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{1}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{1}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2};$$

$$x=arctgt, dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int R(\cos^{2n}x;\sin^{2m}x)dx=\int R(\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n;\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^m)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 10.1.

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\begin{bmatrix} tgx=t \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}tgx+C.$$

10.2. Интегралы типа $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$

Для нахождения интеграла применяют следующие приемы:

a) если m - целое положительное нечетное число, а n- любое число, то $\sin^m x=\sin^{m-1}x\cdot\sin x$ и $\cos x=t, d(\cos x)=-dt$;

b) если n - целое положительное нечетное число, а m - любое число, то $\cos^n x=\cos^{n-1}x\cdot\cos x$ и $\sin x=t, d(\sin x)=dt$;

c) если n и m - целые положительные четные числа, то применяют формулы понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}; \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;

d) если $m+n$ - четное отрицательное целое число, то применяется подстановка $tgx = t$.

Пример 10.2.

а) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 xdx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos xdx = \int \sin^4 x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos xdx =$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ \cos xdx = dt \end{bmatrix} = \int t^4 \cdot \left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^4 \cdot \left(1-2t+t^2\right) dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^5 + t^6) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

б) $\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3xdx = \int \left(\dfrac{1-\cos 6x}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1+\cos 6x}{2}\right) dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 6x\right)\cdot\left(1+\cos 6x\right)\cdot\left(1-\cos 6x\right)dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 6x\right)\cdot\left(1-\cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \left(1-\cos 6x\right)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 6xdx - \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \cos 6xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2}\right)dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \frac{d\left(\sin 6x\right)}{6} = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 12x}{12}\right) - \frac{1}{48}\frac{\sin^3 6x}{3} + C.$$

в)

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tgx| + C.$$

10.3. Интегралы типа $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta xdx; \int \sin \alpha x \cdot \sin \beta xdx; \int \cos \alpha x \cdot \cos \beta xdx$ вычисляются с помощью формул тригонометрии

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha x - \beta x\right) + \sin\left(\alpha x + \beta x\right)\right);$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha x - \beta x\right) + \cos\left(\alpha x + \beta x\right)\right);$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha x - \beta x\right) - \cos\left(\alpha x + \beta x\right)\right).$$

Пример 10.3.

$$\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 3x + \sin 7x\right) dx = \frac{1}{6}\int \sin 3x d(3x) + \frac{1}{14}\int \sin 7x d(7x) =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

11.1.1. Задача о площади

Поставим задачу о вычислении площади плоской фигуры *K*, ограниченной произвольной замкнутой линией (рис. 11.1).

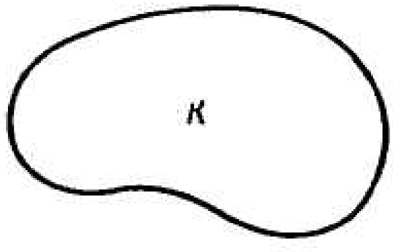
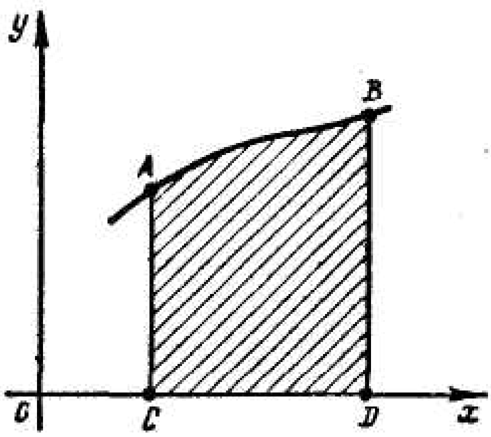


Рис. 11.1

Вначале рассмотрим частный случай, когда фигура *K* лежит в плоскости *Oxy* и ограничена кривой *AB*, отрезком *CD* оси абсцисс и двумя прямыми *CA* и *DB*, проведенными в концах отрезка параллельно оси *Oy* (рис. 11.2). Назовем

Рис. 11.2



эту фигуру *криволинейной трапецией*, а отрезок *CD* – её основанием. Предположим, что точки *C* и *D* имеют соответственно абсциссы a и b $\left(b > a\right)$ и что кривая *AB* относительно выбранной системы координат задана уравнением $y = f\left(x\right)$, где $f\left(x\right)$ - непрерывная и положительная на интервале $\left[a,\, b\right]$ функция. Разобьем интервал $\left[a,\, b\right]$ на части с помощью $n-1$ точек деления с абсциссами $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$. Кроме того, для единообразия записи положим $a = x_0$ и $b = x_n$. Точки деления разбивают интервал $\left[a,\, b\right]$ на n малых интервалов: $\left[x_0,\, x_1\right]$, $\left[x_1,\, x_2\right]$, ...,$\left[x_{i-1},\, x_i\right]$, ...,$\left[x_{n-1},\, x_n\right]$.

Проведя через точки деления прямые, параллельные оси Oy, мы разобьем криволинейную трапецию на n малых криволинейных трапеций (рис. 5.3). Ясно, что площадь всей криволинейной трапеции равна сумме площадей всех n малых криволинейных трапеций. Поэтому если обозначить через S площадь всей криволинейной трапеции, а через ΔS_i - площадь малой криволинейной трапеции с основанием $\left[x_{i-1},\, x_i\right]$ (i принимает значение от 1 до n), то

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_i + \ldots + \Delta S_n, \qquad (11.1)$$

или в более короткой записи, $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$, (11.1')

где буква $\sum$ (сигма) есть знак суммы, а символ $\sum_{i=1}^{n}$ означает, что суммируются n слагаемых при изменении индекса i от 1 до n.

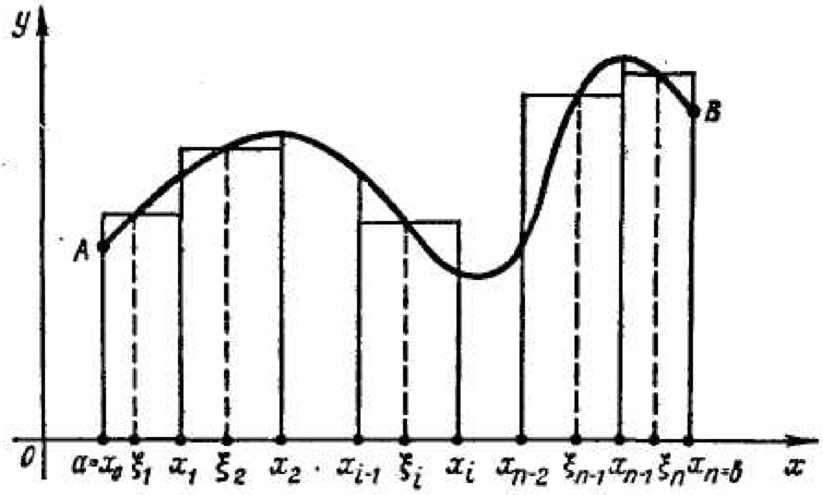


Рис. 11.3

Но вычислить площадь этих малых трапеций так же трудно, как и площадь большей. Поэтому мы поступим следующим образом: в каждом из маленьких интервалов $\left[x_{i-1},\, x_i\right]$ выберем произвольную точку $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ и построим в этой точке ординату кривой $f\left(\xi_i\right)$ (рис. 11.3 и 11.4).

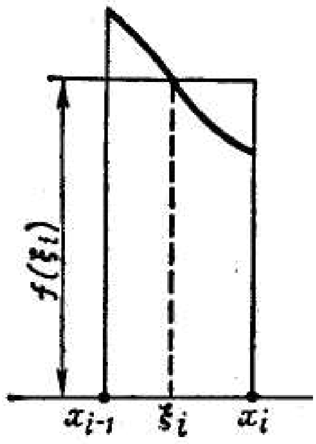


Рис. 11.4

Заменим теперь каждую малую криволинейную трапецию с основанием $\left[x_{i-1},\, x_i\right]$ (i = 1, 2, …, n) прямоугольником с тем же основанием и с высотой, равной $f\left(\xi_i\right)$ (см. рис. 11.4).

Площадь такого прямоугольника равна $f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$, так как $x_i - x_{i-1}$ - длина малого интервала $\left[x_{i-1},\, x_i\right]$. Приняв площадь этого прямоугольника за приближенное значение площади малой криволинейной трапеции, получим

$$\Delta S_i \approx f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \tag{11.2}$$

Заменив площадь каждой малой криволинейной трапеции площадью прямоугольника с тем же основанием, но с высотой, равной ординате кривой в некоторой произвольной точке основания, получим ступенчатую фигуру, показанную на рисунке 5.3. Площадь этой ступенчатой фигуры дает приближенное значение площади криволинейной трапеции. Поэтому для площади S криволинейной трапеции получаем следующее приближенное равенство:

$$S \approx f\left(\xi_1\right)\left(x_1 - x_0\right) + f\left(\xi_2\right)\left(x_2 - x_1\right) + \ldots + f\left(\xi_n\right)\left(x_n - x_{n-1}\right), \tag{11.3}$$

или в более короткой записи,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \tag{11.3’}$$

Обозначим через λ наибольшую из длин малых интервалов:

$$\lambda = \text{наиб.}\ \left\{\left(x_1 - x_0\right);\ \left(x_2 - x_1\right);\ \ldots;\ \left(x_n - x_{n-1}\right)\right\}.$$

С уменьшением λ точность приближенной формулы (5.3’) увеличивается. Поэтому вполне естественно за точное значение площади S криволинейной трапеции принять предел площади ступенчатых фигур при условии, что наибольшая длина λ малых интервалов стремится к нулю. Таким образом,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \tag{11.4}$$

Если, кроме того, обозначить $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, то формула (1.4) примет следующий окончательный вид:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i\,. \tag{11.4’}$$

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции привело нас к нахождению предела некоторой суммы вида (5.4’).

Возвращаясь к задаче о вычислении площади плоской области K, ограниченной произвольной замкнутой линией, заметим, что эта задача может быть сведена к задаче нахождения криволинейных трапеций. Например, на рисунке 11.5 площадь области, ограниченной контуром $AnBmA$, можно найти как разность площадей криволинейных трапеций $A_1B_1BmAA_1$ и $A_1B_1BnAA_1$.

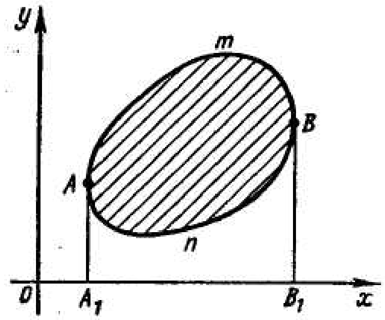


Рис. 11.5

11.1.2. Задача о работе переменной силы

Если материальная точка под действием силы $\boldsymbol{F}$, не меняющейся ни по величине, ни по направлению, переместилась на расстояние l в направлении действия силы, то работа силы, как известно из механики, равна произведению величины силы F на перемещение l, т.е.

$$E = Fl. \qquad (11.5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда сила $\boldsymbol{F}$ меняется по своей численной величине, хотя и сохраняет постоянное направление. Пусть под действием этой силы материальная точка перемещается по прямой, направленной вдоль линии действия силы. Поставим задачу о вычислении работы силы $\boldsymbol{F}$.

Примем прямую, вдоль которой перемещается материальная точка, за ось Ox. Пусть начальная и конечная точки пути имеют соответственно абсциссы a и b $(a < b)$. В каждой точке интервала $[a, b]$ величина силы имеет определенное значение, т.е. является некоторой функцией абсциссы: $F = f(x)$. Эту функцию будем считать непрерывной. Разобьем сегмент $[a, b]$ между начальной и конечной точками пути на n малых интервалов (рис. 11.6) $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ...,$[x_{n-1}, x_n]$ (здесь $a = x_0$, $b = x_n$), длины которых соответственно равны

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ ...,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ ...,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

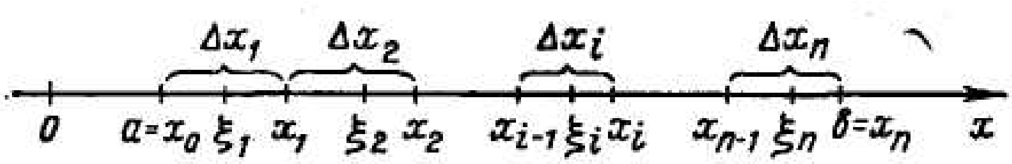


Рис. 11.6

Работа на всем пути $[a, b]$ равна сумме работ на всех малых участках пути. Обозначив искомую работу на всем пути через E, а работу на малом участке $[x_{i-1}, x_i]$ - через ΔE_i, имеем

$$E = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_i.$$

Но определить работу на малом участке так же трудно, как на всем пути, так как сила непостоянна. Однако если интервалы $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ разбиения брать достаточно мелкими, то вследствие предположения о непрерывности функции $F = f\left(x\right)$ сила на каждом из малых участков пути изменится незначительно. Выберем в каждом малом интервале $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ по точке $\xi_i\left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ и предположим, что в каждом малом интервале величина силы имеет постоянное значение, равное ее значению в точке $\xi_i : F_i = f\left(\xi_i\right)$.

При этом предположении работа силы на отрезке пути $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ согласно формуле (11.5) равна

$$F_i \Delta x_i = f\left(\xi_i\right)\Delta x_i .$$

Но в действительности на малом интервале $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ сила непостоянна, поэтому выражение $f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ дает лишь приближенное значение работы на этом малом участке. Таким образом, на участке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ имеем $\Delta E_i \approx f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$, а на всем пути $\left[a,\ b\right]$

$$E \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i . \tag{11.6}$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше Δx_i. Поэтому за точное значение работы естественно принять предел суммы (11.6) при условии, что наибольшая длина λ малых перемещений стремится к нулю, т.е.

$$E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i . \tag{11.7}$$

11.2. Определенный интеграл

11.2.1. Интегральная сумма. Определенный интеграл

Пусть на интервале $\left[a,\ b\right]$ задана функция $y = f\left(x\right)$. Выполним следующие действия.

1) С помощью точек деления $x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1}$ разобьем интервал $\left[a,\ b\right]$ на *n* «малых» интервалов (рис. 1.6):

$\left[x_0, x_1\right]$, $\left[x_1, x_2\right]$, ..., $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, ..., $\left[x_{n-1}, x_n\right]$, где $x_0 = a$, $x_n = b$.

2) В каждом из малых интервалов $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ (*i*=1, 2, 3, …, *n*) выберем произвольную точку ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ и умножим значение функции $f\left(x\right)$ в точке ξ_i на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего интервала: $f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$.

3) Составим сумму σ_n всех таких произведений:

$$\sigma_n = f\left(\xi_1\right)\Delta x_1 + f\left(\xi_2\right)\Delta x_2 + \ldots + f\left(\xi_i\right)\Delta x_i + \ldots + f\left(\xi_n\right)\Delta x_n ,$$

или в сокращенной записи:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (11.8)$$

Сумма вида (11.8) называется *интегральной суммой.*

4) Назовем наибольшую из длин малых интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ *шагом разбиения* и обозначим его через λ.

Пусть число *n* интервалов разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ неограниченно растет и $\lambda \to 0$. Если при этом интегральная сумма σ_n имеет предел *I*, который не зависит ни от способа разбиения интервала $[a,\ b]$ на малые интервалы $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i в каждом из них, то это число *I* называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается так: «определенный интеграл от *a* до *b* от $f(x)$ на *dx*).

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (11.9)$$

Числа *a* и *b* соответственно называются *нижней и верхней границами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией, x* — *переменной интегрирования,* а интервал $[a,\ b]$ — *сегментом интегрирования* (или областью интегрирования).

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, когда шаг разбиения стремится к нулю.

Функция $f(x)$, для которой на интервале $[a,\ b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx,$ называется *интегрируемой* на этом интервале.

Замечание 1. Для заданной функции $f(x)$ и заданного интервала $[a,\ b]$ мы, очевидно, имеем бесконечное множество интегральных сумм. Значения этих интегральных сумм зависят как от выбора точек деления $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_i,\ ...,\ x_{n-1}$, так и от выбора промежуточных точек ξ_i.

Замечание 2. Если функция *y = f(x)* неотрицательна на интервале $[a,\ b]$, то как интегральная сумма, так и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл. В самом деле, произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ численно равно площади прямоугольника, имеющего основанием интервал $[x_{i-1}, x_i]$, а высотой — ординату кривой в точке ξ_i (см. рис. 11.4). Построив над каждым малым сегментом прямоугольник с высотой $f(\xi_i)$, получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна интегральной сумме σ_n, соответствующей данному разбиению интервала $[a, b]$ на части и данному выбору точек ξ_i (см. рис. 5.3).

Замечание 3. Интегральная сумма (5.8), очевидно, не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т. е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt \text{ и т. д.}$$

Возвращаясь теперь к задачам п. 1, мы видим, что:

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для всех x на интервале $[a, b]$, численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$, взятому по интервалу $[a, b]$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Этот факт, выражающий геометрический смысл определенного интеграла, кратко формулируется так: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

2. Работа E переменной силы, величина которой F — $f(x)$, равна определенному интегралу от силы, т. е.

$$E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример11.1. Вычислить интеграл $\int_a^b 1 \cdot dx$.

Решение. Разобьем интервал $[a, b]$ на n произвольных частей точками деления $x_1, ..., x_i, ..., x_{n-1}$ и составим соответствующую интегральную сумму. Так как подынтегральная функция постоянна и тождественно равна единице, то при любом выборе промежуточных точек ξ_i получим

$$\sigma_n = 1 \cdot \Delta x_1 + ... + 1 \cdot \Delta x_i + ... + 1 \cdot \Delta x_n =$$
$$= (x_1 - a) + ... + (x_i - x_{i-1}) + ... + (b - x_{n-1}) = b - a.$$

Таким образом, любая интегральная сумма для данной функции равна b—а, а следовательно, и ее предел (т. е. определенный интеграл) также равен *b—a:*

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ мы исходили из предположения, что нижняя граница a меньше верхней границы $b (a<b)$. Обобщим понятие

определенного интеграла на случай, когда $a>b$ и $a=b$. При $a>b$ по определению полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (11.10)$$

Это кратко выражают так: *при перестановке границ интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный.*

Определенный интеграл с равными нижней и верхней границами по определению принимается равным нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (11.11)$$

В связи с определением определенного интеграла возникает вопрос, при каких условиях существует предел интегральной суммы, т. е. существует определенный интеграл.

Имеет место **теорема существования определенного интеграла**, которую мы приведем без доказательства.

Всякая непрерывная на интервале $[a,\ b]$ *функция интегрируема, т. е. для такой функции существует определенный интеграл.*

Таким образом, для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на данном сегменте. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций. Например, можно доказать, что для всякой ограниченной на сегменте функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва, существует определенный интеграл.

11.2.2. Свойства определенного интеграла

Установим теперь, исходя из определения интеграла, его простейшие свойства. При этом подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

1^0. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е. если k – некоторое число, то*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \qquad (11.12)$$

Действительно,

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\left[k\cdot\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= k\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

При этом мы воспользовались тем свойством, что постоянный множитель можно вынести за знак предела.

2^0. *Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых.*

Например, для двух слагаемых $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеем:

$$\int_a^b \left[f(x)+\varphi(x)\right]dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{11.13}$$

Действительно, согласно определению интеграла имеем:

$$\int_a^b \left[f(x)+\varphi(x)\right]dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)+\varphi(\xi_i)\right]\Delta x_i=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)+\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right]=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i+$$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Совокупность свойств 1^0 и 2^0 называется свойством л и н е й н о с т и .

3^0. *Если интервал интегрирования* $[a,\ b]$ *разбит на две части* $[a,\ c]$ *и* $[c,\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{11.14}$$

Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения интервала $[a,\ b]$ на части и от выбора промежуточных точек ξ_i. Это позволяет при составлении каждой интегральной суммы включить c в число точек разбиения. Пусть $c=x_k$. Тогда интегральная сумма будет состоять из двух частей, одна из которых относится к интервалу $[a,\ c]$, а другая – к интервалу $[c,\ b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Геометрически свойство 3^0 выражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,\ b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$ (рис. 11.7).

З а м е ч а н и е . Свойство было нами сформулировано в предположении, что $a<c<b$. Однако равенство (6.14) имеет место для любых чисел a, b и c. В самом деле, пусть для определенности $c<a<b$. Тогда, применяя свойство 3^0 к интервалу* $[c,\ b]$, имеем

* При этом мы предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[c,\ b]$.

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

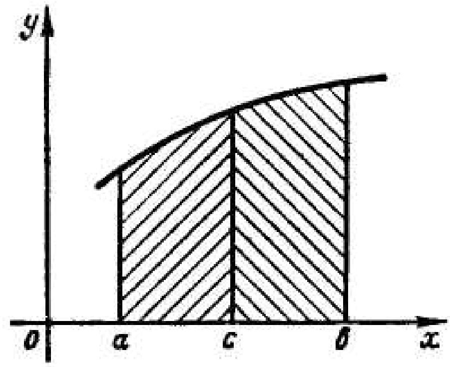


Рис. 11.7

Но $\int_c^a f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx$ (формула (11.10), поэтому

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 3^0 часто называется свойством а д д и т и в н о с т и .

4^0. *Если на интервале* $[a,\ b]$ $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

В самом деле, так как $f(\xi) \geq 0$ и $\Delta x_i > 0$ для любых *i*, то интегральная сумма $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$. Поэтому и предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$, также неотрицателен.

Можно доказать, что если на интервале $[a,\ b]$ непрерывная функция $f(x) \geq 0$ и хотя бы в одной точке этого интервала $f(x) > 0$, то имеет место строгое неравенство $\int_a^b f(x)dx > 0$.

5^0. *Если на интервале* $[a,\ b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq \varphi(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (11.15)$$

Иными словами, неравенство можно почленно интегрировать.

В самом деле, разность $f(x)-\varphi(x)\geq 0$, поэтому согласно свойству 4^0 $\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]\geq 0$. Но так как согласно свойствам 1^0 и 2^0

$$\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)dx,$$

то $\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)dx\geq 0$, откуда $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b\varphi(x)dx$.

Это свойство имеет простой геометрический смысл. Пусть обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются неотрицательными на интервале $[a,\, b]$. Тогда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, содержит криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y=\varphi(x)$ (рис. 11.8). Поэтому площадь первой фигуры не меньше площади второй фигуры. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла,

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b\varphi(x)dx.$$

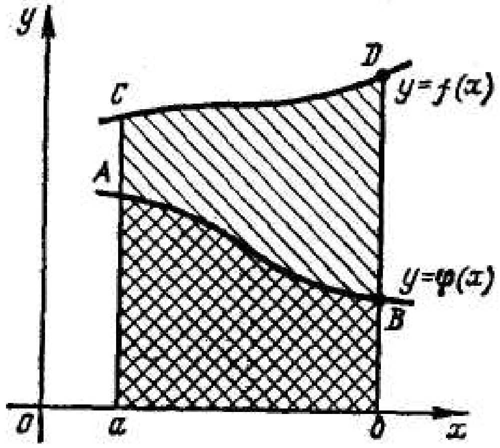


Рис. 11.8

В частности, так как всегда $-\left|f(x)\right|\leq f(x)\leq\left|f(x)\right|$, то из свойства 5^0 следует, что

$$-\int_a^b\left|f(x)\right|dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b\left|f(x)\right|dx.$$

Отсюда имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b\left|f(x)\right|dx. \qquad (11.16)$$

Теорема о среднем значении. *Если* $f(x)$ - непрерывная на интервале $[a,\, b]$ *функция, то существует такая точка* ξ *этого интервала, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (11.17)$$

Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$. Тогда для любого x, $a \le x \le b$, выполняются неравенства

$$m \le f(x) \le M. \qquad (11.18)$$

Применяя свойства 5^0 и 1^0, из неравенства (1.18) получим

$$m \cdot \int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx.$$

Но $\int_a^b dx = b-a$ (см. пример 1). Следовательно,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (11.19)$$

Разделив все члены неравенства (1.19) на $b-a$, получим $m \le \mu \le M$, где

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu. \qquad (11.20)$$

Таким образом, число μ является промежуточным между наименьшим значением m функции $f(x)$ и её наибольшим значением M. Так как непрерывная на интервале $[a,\ b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между m и M, то найдется такое значение ξ на интервале $[a,\ b]$, для которого $f(\xi) = \mu$.

Подставляя в выражение (11.20) вместо μ равное ему значение $f(\xi)$, получим

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi), \text{ или } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Итак, *определенный интеграл от непрерывной функции равен значению подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке, умноженному на длину интервала интегрирования.*

Теорема о среднем значении допускает наглядное геометрическое толкование. Пусть $f(x) \ge 0$ на интервале $[a,\ b]$. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции (рис. 5.9). Рассмотрим прямоугольник $aABb$ с тем же основанием $[a,\ b]$, что и у криволинейной трапеции, и с высотой, равной $f(\xi)$. Произведение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника. Следовательно, *криволинейная трапеция равновелика* *прямоугольнику с тем же основанием и с высотой, равной ординате кривой в некоторой промежуточной точке ξ основания.*

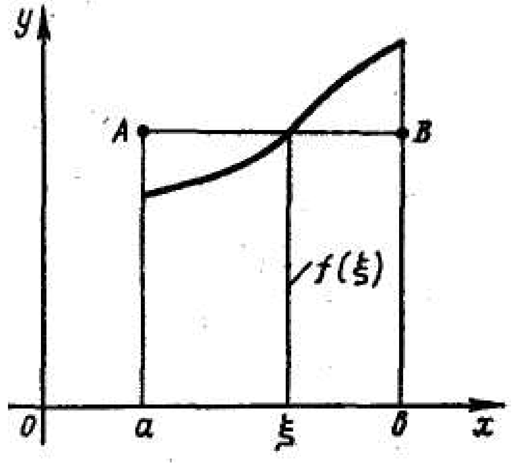


Рис. 11.9

Значение функции в точке ξ, определяемое из формулы (11.17), называется *средним значением функции на интервале.*

11.2.3. Производная интеграла по переменной верхней границе

Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на интервале $[a,\ b]$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. При заданной подынтегральной функции значение интеграла зависит от обеих границ интегрирования a и b. Если закрепить нижнюю границу a и изменять верхнюю границу b, то интеграл будет функцией своей верхней границы. Чтобы подчеркнуть, что верхняя граница переменная, мы обозначим ее вместо b через x. Переменную интегрирования, чтобы не смешивать ее с верхней границей, обозначим через t; ясно, что значение интеграла от этого не изменится (замечание 3 в п. 11.2.1). Таким образом, интеграл с переменной верхней границей является некоторой функцией x:

$$I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Эта функция обладает замечательным свойством, выраженным в следующей теореме.

Теорема. *Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей:*

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x). \tag{11.21}$$

Доказательство. Для нахождения производной функции $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ дадим x приращение Δx. Тогда новое значение функции равно

$$I(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Следовательно, приращение функции $I(x)$ при переходе из точки x в точку $x+\Delta x$ окажется равным

$$\Delta I = I(x+\Delta x)-I(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt.$$

Но так как по свойству аддитивности

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

то

$$\Delta I=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Применим к последнему интегралу теорему о среднем:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\Delta x,$$

где c заключено между x и $x+\Delta x$. Таким образом, $\Delta I=f(c)\Delta x$. Согласно определению производной, имеем

$$\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{dx}=\frac{dI(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c).$$

Так как $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x$, а следовательно, и c стремятся к x. Согласно условию, подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна в точке x. Поэтому $\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)=f(c)$. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема о производной интеграла по верхней границе является одной из основных теорем математического анализа. Эта теорема вскрывает глубокую связь между операциями определенного интегрирования и дифференцирования. Теорема о производной интеграла по верхней границе показывает, что функция $\int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для $f(x)$. Но интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ существует для любого значения x в силу теоремы существования определенного интеграла от непрерывной функции.

Таким образом, имеет место следующая **теорема существования первообразной для непрерывной функции:** *всякая непрерывная функция* $f(x)$ *имеет первообразные, одной из которых является интеграл* $\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

З а м е ч а н и е 1. Исходя из геометрического смысла интеграла, как площади, замечаем, что $I(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ выражает переменную площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,\ x]$ (рис. 11.10). Следовательно, на основании только что изложенного, можно сказать, что эта переменная площадь является первообразной для ординаты $y=f(x)$ линии, ограничивающей эту криволинейную трапецию.

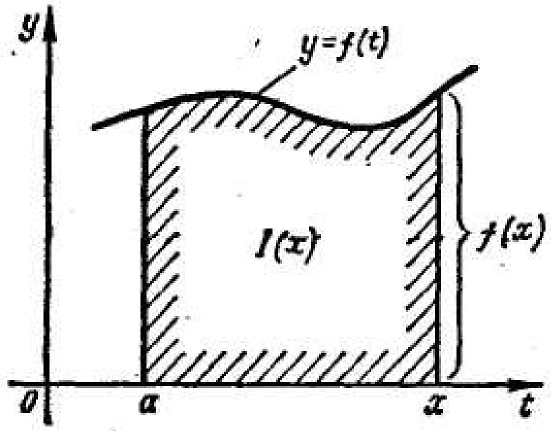


Рис. 11.10

З а м е ч а н и е 2. При $f(x)>0$ функция $I(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ - возрастающая, так как с возрастанием x площадь криволинейной трапеции возрастает.

11.2.4. Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление определенного интеграла, как предела интегральных сумм, сложно даже для простейших функций. Теорема о производной интеграла по верхней границе позволяет установить простой метод вычисления определенных интегралов, минуя суммирование и переход к пределу. Этот новый метод вычисления определенного интеграла выражается формулой Ньютона – Лейбница, к выводу которой мы приступим.

В предыдущем пункте мы установили, что функция $I(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$. Как известно, всякая другая первообразная для функции $f(x)$ отличается от

$I(x)$ только постоянным слагаемым. Поэтому если $F(x)$ - другая первообразная для $f(x)$, то $I(x)=F(x)+C$, или

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C. \qquad (11.22)$$

Постоянную C легко найти, если заметить, что $I(a)=\int_a^a f(t)dt=0$, как интеграл с равными границами интегрирования. Поэтому, подставляя в соотношение (5.22) $x=a$, получим $\int_a^a f(t)dt = F(a)+C=0$. Отсюда $C=-F(a)$ и, следовательно, $\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$. В частности, при $x=b$ имеем

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a). \qquad (11.23)$$

Это и есть *формула Ньютона – Лейбница.*

Она показывает, что для того чтобы вычислить определенный интеграл, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ и взять разность значений этой первообразной, вычисленных для значений x, равных верхней и нижней границам интегрирования. Короче говоря, *определенный интеграл равен приращению первообразной от подынтегральной функции на интервале интегрирования.*

Разность $F(b)-F(a)$ символически обозначают $F(x)\Big|_a^b$:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Применяя этот символ, мы можем записать формулу Ньютона – Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (11.24)$$

Пример 5.2. Вычислить $\int_1^2 e^x dx$.

Решение. Одной из первообразных от подынтегральной функции является функция e^x. Поэтому, применяя формулу (5.24) Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1).$$

Пример11.3. Вычислить $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \pi/6 .$$

З а м е ч а н и е. Формула Ньютона – Лейбница была выведена в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ н е п р е р ы в н а. Для разрывных функций формула Ньютона – Лейбница может не иметь места.

11.2.5. Замена переменной в определенном интеграле

Как и в случае неопределенного интеграла, вычисление определенного интеграла можно упростить с помощью замены переменной.

Пример 11.4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Найдем вначале первообразную от подынтегральной функции, сделав замену переменной по формуле $\sqrt{x+1} = t$. Тогда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ и, следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = 2\left(\frac{\sqrt{\left(x+1^3\right)}}{3} - \sqrt{x+1} \right) + C .$$

Таким образом, одной из первообразных от функции $\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ является функция

$$2\left(\frac{\sqrt{\left(x+1^3\right)}}{3} - \sqrt{x+1} \right).$$

Следовательно, применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = 2\left(\frac{\sqrt{\left(x+1^3\right)}}{3} - \sqrt{x+1} \right)\Bigg|_3^8 = 2\left(\frac{\sqrt{(8+1)^3}}{3} - \sqrt{8+1} \right) -$$

$$-2\left(\frac{\sqrt{(3+1)^3}}{3} - \sqrt{3+1} \right) = 10\frac{2}{3}.$$

Однако использованный здесь прием приводит к довольно громоздким вычислениям. Ниже будет показано, что можно упростить вычисление определенного интеграла, не возвращаясь от переменной t вновь к переменной x.

Предположим, что нужно вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывная функция на интервале $[a,\, b]$. Перейдем от переменной

x к переменной t, полагая $x=\varphi(t)$. Пусть значению $t=\alpha$ по формуле $x=\varphi(t)$ соответствует значение $x=a$, а значению $t=\beta$ по той же формуле – значение $x=b$; таким образом, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Предположим, кроме того, что:

1) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на интервале $\alpha\le t\le\beta$;

2) при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы интервала $a\le x\le b$.

При этих условиях имеет место следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

В самом деле, пусть $F(x)$ -первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Тогда по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{11.25}$$

Теперь покажем, что если в первообразной $F(x)$ положить $x=\varphi(t)$, то функция $F\left[\varphi(t)\right]$ будет первообразной для подынтегральной функции преобразованного интеграла, т.е. для функции $f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)$. Действительно, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dF\left[\varphi(t)\right]}{dt}=\frac{dF(x)}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot\varphi'(t)=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t).$$

Поэтому по той же формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right].$$

Но так как по условию $\varphi(\beta)=b$, $\varphi(\alpha)=a$, то $F\left[\varphi(\beta)\right]=F(b)$, а $F\left[\varphi(\alpha)\right]=F(a)$. Следовательно,

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F(b)-F(a). \tag{11.25'}$$

Сравнивая равенства (11.25) и (11.25’), приходим к *формуле замены переменной:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \tag{11.26}$$

Покажем, как с помощью формулы замены переменной вычислить определенный интеграл $\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Положим $\sqrt{x+1}=t$, т.е. $x=\varphi(t)=t^2-1$. В данном случае *a*=3, *b*=8. При *x*=*a*=3 имеем $t=\sqrt{8+1}=3$. Итак, $\alpha=2$, $\beta=3$. Находим, далее, $\varphi'(t)dt=2tdt$. Теперь, используя формулу (6.26) замены переменной, получим

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3 \frac{(t^2-1)}{t}2tdt=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_2^3=2\left[\left(\frac{3^3}{3}-3\right)-\left(\frac{3^3}{3}-2\right)\right]=10\frac{2}{3}.$$

Пример 11.5. Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Полагая $x=a\sin t$, получим $dx=a\cos tdt$. Если *x*=0, то $\sin t=0$, откуда *t*=0; если *x*=*a*, то $\sin t=1$, откуда $t=\pi/2$. Итак, $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$.

Следовательно, по формуле замены переменной имеем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=a\int_0^{\pi/2} \cos^2 tdt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Заметим, что часто вместо замены переменной $x=\varphi(t)$ употребляют обратную замену $t=\psi(x)$; однако при этом необходимо, чтобы функция, обратная функции $t=\psi(x)$, существовала и чтобы для этой обратной функции выполнялись условия, при которых была выведена формула замены переменной.

Пример 11.6. Вычислить $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Решение. Полагаем $\sqrt{e^x-1}=t$. При этом легко убедиться, что обратная функция $x=\ln(1+t^2)$ существует и удовлетворяет условиям, при которых была выведена формула замены переменной. Находим $dx=\frac{2tdt}{1+t^2}$. Если $x=\ln 2$, то $t=1$; если $x=2\ln 2$, то $t=\sqrt{3}$. Итак, $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{3}$. Применяя формулу замены переменной, получим

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t(1+t^2)}=2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}=2[arctgt]_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

11.2.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - две функции, непрерывные со своими первыми производными на интервале $[a,\ b]$.

Возьмем дифференциал от их произведения:

$$d\left[u(x)v(x)\right]=u(x)dv(x)+v(x)du(x)=u(x)v'(x)dx+v(x)u'(x)dx.$$

Интегрируя это тождество в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b d\left[u(x)v(x)\right]=\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (11.27)$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b d\left[u(x)v(x)\right]=u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, равенство (5.27) примет следующий вид:

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

откуда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (11.28)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

Так как $du=u'(x)dx$ и $dv=v'(x)dx$, то формулу (5.28) можно записать в следующем более компактном виде:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (11.29)$$

При этом следует иметь в виду, что границы интегрирования относятся к независимой переменной x.

Пример 11.7. Вычислить $\int_0^\pi x\cos xdx$.

Решение. Положим $x=u$, $\cos xdx=dv$. Тогда $du=dx$, $v=\sin x$. Применяя формулу интегрирования по частям, найдем

$$\int_0^\pi x\cos xdx=\left[x\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin xdx=\left[\cos x\right]_0^\pi=-2,$$

так как $\left[x\sin x\right]_0^\pi=\pi\sin\pi-0\sin 0=0$.

Пример 11.8. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим $\ln x=u$, $\frac{dx}{\sqrt{x}}=dv$, откуда $du=\frac{dx}{x}$, $v=2\sqrt{x}$.

Следовательно, по формуле интегрирования по частям

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e 2\sqrt{x}\frac{dx}{x}=2\sqrt{e}\ln e-2\sqrt{1}\ln 1-4\left[\sqrt{x}\right]_1^e=$$

$$=2\sqrt{e}-\left(4\sqrt{e}-4\right)=2\left(2-\sqrt{e}\right).$$

11.3. Приложения определенного интеграла

11.3.1. Вычисление площади в декартовых координатах

Как мы установили выше, если на интервале $[a,\ b]$ функция $y=f(x)$ непрерывна и положительна, то площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,\ b]$, ограниченной сверху графиком этой функции, можно найти по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx. \qquad (11.30)$$

Пример 11.9. Вычислить площадь сегмента параболы, т.е. фигуры, ограниченной другой параболы $x=y^2$ и отрезком *AB* прямой $x=a$ (рис. 11.11).

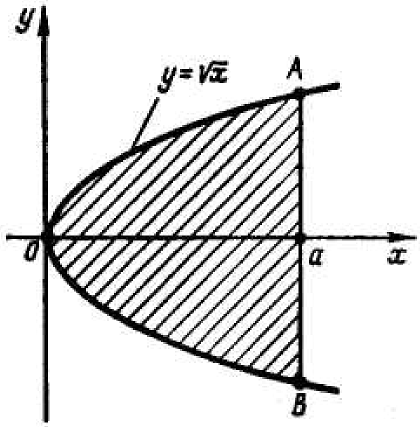


Рис. 11.11

Решение. Исходя из симметрии сегмента параболы относительно оси *Ox*, найдем его площадь *S*, как удвоенную площадь криволинейной трапеции *OAa*:

$$S=2\int_0^a ydx=2\int_0^a \sqrt{x}dx=\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^a=\frac{4a^{3/2}}{3}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}.$$

Пример 11.10. Определить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Из симметрии эллипса относительно осей вытекает, что искомая площадь *S* равна учетверенной площади криволинейной трапеции *OAB* (рис. 11.12):

$$S=4\int_0^a ydx=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

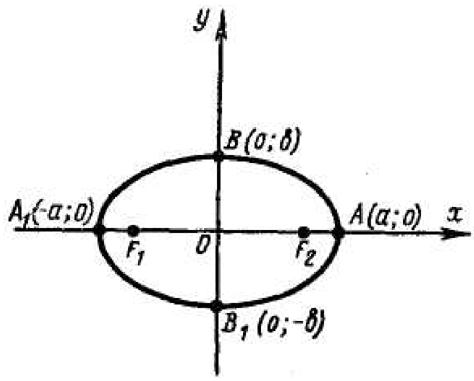


Рис. 11.12

В примере 11.5 мы нашли, что $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$. Следовательно,

$$S = 4\frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

В частности, если $a=b=R$, то эллипс превращается в окружность радиуса R, и мы приходим к известной формуле для площади круга: $S = \pi R^2$.

Пусть теперь $f(x) < 0$ на интервале $[a,\ b]$ (рис. 5.13). Криволинейная трапеция с основанием $[a,\ b]$, ограниченная снизу кривой $y = f(x)$, лежит ниже оси Ox. Из соображения симметрии заключаем, что ее площадь S равна площади другой криволинейной трапеции, имеющей то же основание, но ограниченной сверху кривой $y = -f(x)$ (см. рис. 11.13). Так как по условию $f(x) < 0$, то $-f(x) > 0$ и, применяя формулу (11.30), найдем

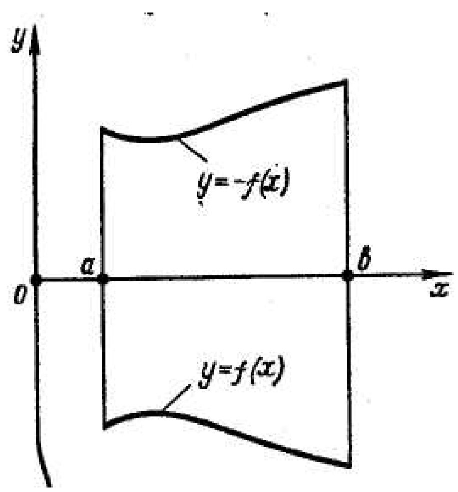


Рис. 5.13

$$S = \int_a^b \left[-f(x)\right]dx = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (11.31)$$

Так выражается площадь криволинейной трапеции в случае отрицательной подынтегральной функции.

Пример 11.11. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4$ и осью абсцисс (рис. 11.14).

Решение. Парабола $y = x^2 - 4$ пересекается с осью абсцисс в точках $A(-2;\ 0)$ и $B(2;\ 0)$. Следовательно, надо найти площадь S криволинейной трапеции ACB, основанием которого служит интервал $[-2,\ 2]$. Так как на этом интервале $y \le 0$, то для нахождения площади S пользуемся формулой (11.31).

$$S = -\int_a^b f(x)dx = - - \int_{a-2}^{2} \left(x^2 - 4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

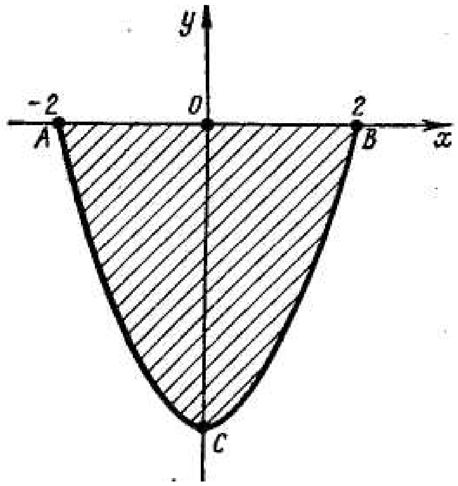


Рис. 11.14

Формулы (11.30) и (11.31) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx. \qquad (11.32)$$

Эта формула остается справедливой также и в том случае, когда функция $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ меняет знак, т.е. принимает на этом интервале как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 11.12. Вычислить площадь S фигуры $OABCD$, ограниченной косинусоидой $y = \cos x$, осями координат и прямой $x = \pi$ (рис. 11.15)

Решение. По формуле (11.32) имеем

$$S = \int_0^{\pi} \left|\cos x\right| dx.$$

Так как функция $\cos x$ в промежутке $]0,\ \pi/2[$ положительна, а в интервале $]\pi/2,\ \pi[$ отрицательна, то

$$\left|\cos x\right| = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 \le x \le \pi/2, \\ -\cos x, & \text{если } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Поэтому

$$S=\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\pi/2}\left|\cos x\right|dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\pi/2}\left|\cos x\right|dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\cos x\right)dx=$$
$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=2\,.$$

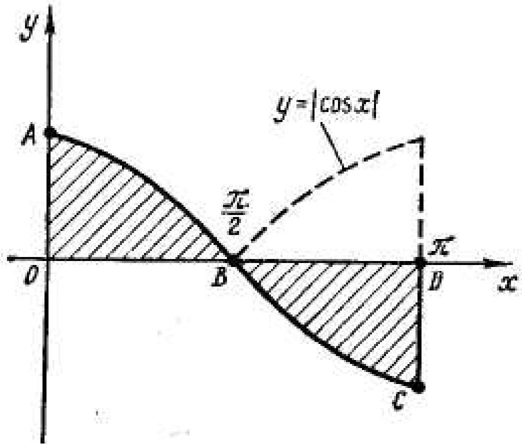


Рис. 11.15

Вычислим теперь площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y=f\left(x\right)$, снизу кривой $y=\varphi\left(x\right)$ $\left[f\left(x\right)\geq\varphi\left(x\right)\right]$ и двумя прямыми *x=a* и *x=b* (рис. 11.15). Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций *aCDb* и *aABb*:

$$\text{пл. } ACDB=\text{пл. } aCDb-\text{пл. } aABb=$$
$$=\int_a^b f\left(x\right)dx-\int_a^b\varphi\left(x\right)dx=\int_a^b\left[f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right]dx\,. \qquad (11.33)$$

Формула (11.33) справедлива при любом расположении графиков функции $y=f\left(x\right)$ и $y=\varphi\left(x\right)$ при условии $f\left(x\right)\geq\varphi\left(x\right)$.

Пример 11.13. Вычислить площадь *S* фигуры, ограниченной кривыми $y=-x^2$ и $y=e^x$, осью ординат и прямой *x=1* (рис. 11.16).

Решение. В данном примере $f\left(x\right)=e^x$, $\varphi\left(x\right)=-x^2$, $f\left(x\right)>\varphi\left(x\right)$, *a=0*, *b=1*. Следовательно, по формуле (11.33) получим

$$S=\int_a^b\left[f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right]dx=\int_0^1\left[e^x-\left(-x^2\right)\right]dx=\int_0^1\left(e^x+x^2\right)dx=$$
$$=\left[e^x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3}\,.$$

В заключение рассмотрим пример на вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически.

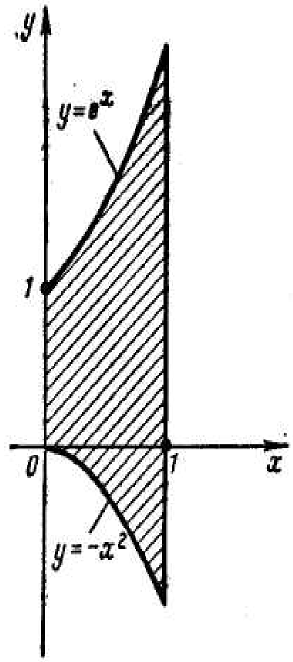


Рис. 11.16

Пример 11.14. Определить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 11.17)

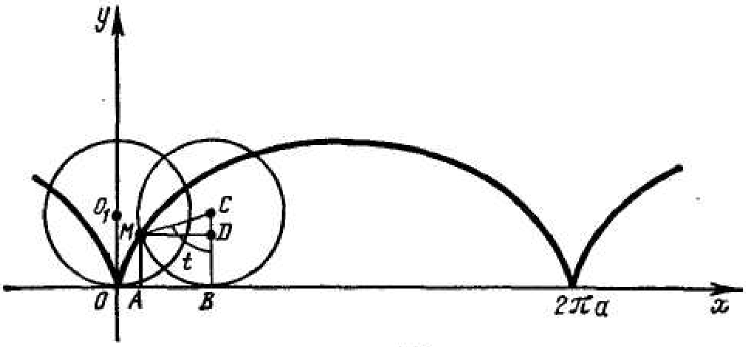


Рис. 11.17

Решение. Искомая площадь S равна $\int\limits_0^{2\pi a} y dx$. Сделаем в этом интеграле замену переменной, положив $x = a(t - \sin t)$. Тогда $dx = a(1 - \cos t)dt$. Из уравнений циклоиды: $y = a(1 - \cos t)$. Заметив, кроме того, что $t=0$ при $x=0$ и $t = 2\pi$ при $x = 2\pi a$, найдем:

$$S = \int\limits_0^{2\pi a} y dx = \int\limits_0^{2\pi a} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi a} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 .$$

11.3.2. Объем тела вращения

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$, ограниченную непрерывной кривой $y = f(x)$. Определим объем тела, образованного вращением трапеции вокруг оси Ox (рис. 11.18). Поперечными сечениями являются круги с радиусами, равными модулю ординаты y вращающейся кривой. Следовательно, площадь сечения

$$S(x) = \pi y^2 = \pi\left[f(x)\right]^2.$$

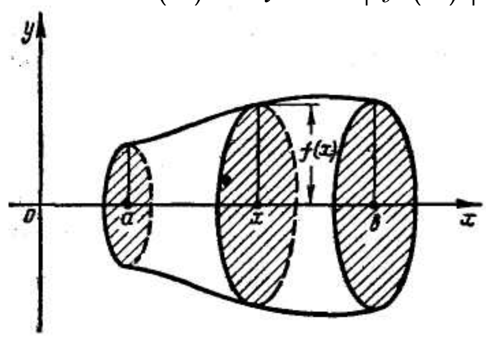


Рис. 11.18

По формуле найдем объем тела вращения

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (11.34)$$

Пример 11.15. Определить объем тела, ограниченного поверхностью вращения параболы $y^2 = x$ вокруг оси Ox и плоскостью $x=h$ (рис. 5.24).

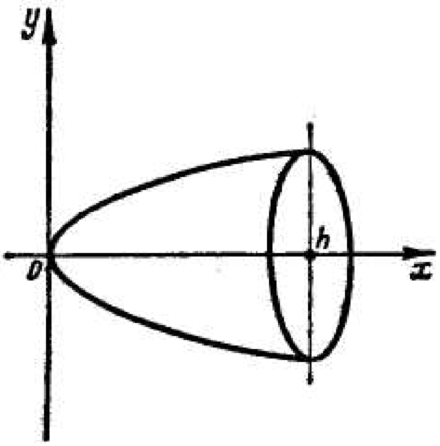


Рис. 11.19

Решение. Применяя формулу (11.34), найдем

$$V = \pi\int_0^h y^2 dx = \pi\int_0^h x dx = \pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h = \frac{\pi h^2}{2}.$$

11.3.3. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Если в *функции Кобба-Дугласа* считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $g(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q=\int_0^T(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt. \qquad (11.35)$$

Пример 11.16. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $g(t)=(1+t)e^{3t}$.

Решение. По формуле (11.35) объем Q произведенной продукции равен

$$Q=\int_0^4(1+t)e^{3t}dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u=t+1$, $dv=3^{3t}dt$. Тогда $du=dt$, $v=\int e^{3t}dt=\frac{1}{3}e^{3t}$.

Следовательно,

$$Q=(t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{1}{3}e^{3t}dt=\frac{1}{3}\left(5e^{12}-1\right)-\frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4=\frac{1}{9}\left(14e^{12}-2\right)\approx 2{,}53\cdot 10^5 \text{ (усл. ед.)}$$

Исследуя *кривую Лоренца* – зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривую *OBA*, рис. 11.20), мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису *OA*, поэтому площадь фигуры *OAB* между биссектрисой *OA* и кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника *OAC* (*коэффициент Джини*), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

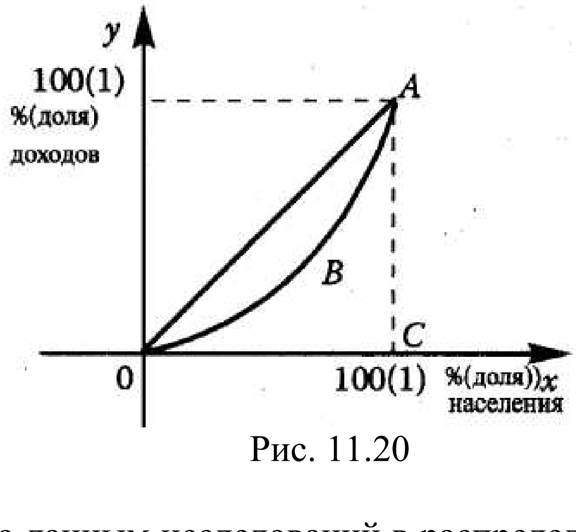


Рис. 11.20

Пример 11.17. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца *OBA* (рис. 11.20) может быть описана уравнением $y=1-\sqrt{1-x^2}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение. Очевидно, коэффициент Джини (рис. 11.20)

$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}$, так как $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$.

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx .$$

Поэтому $k = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - 1$.

С помощью замены, например, $x = \sin t$ можно вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$. Итак, коэффициент Джини $k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$.

Достаточно высокое значение k показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений. Пусть K_t - конечная сумма, полученная за t лет, и K – дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной* суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$, где $i = p/100$ - удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1+it)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1+it)^t$, и потому $K = K_t/(1+i)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt . \qquad (11.36)$$

Пример 11.18. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (11.36) дисконтированная сумма капиталовложений $K = \int_0^3 (10+t) e^{-0,08t} dt$.

Интегрируя (аналогично примеру 1), получим K= 30,5 млрд руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда *среднее время* t_{cp}, затраченное *на изготовление одного изделия в период освоения* от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp}=\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}t(x)\,dx. \tag{11.36}$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t=t(x)$, то часто она имеет вид

$$t=ax^{-b}, \tag{11.37}$$

где a — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

Пример 11.19. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от x_1 = 100 до x_2 = 121 изделий, полагая в формуле (6.49) a =600 (мин), b= 0,5.

Решение. Используя формулу (6.48), получаем

$$t_{cp}=\frac{1}{121-100}\int\limits_{100}^{121}600x^{-121}dx=\frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121}=\frac{400}{7}\approx 57,2\,(\text{мин.}).$$

12. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1. Интегралы с бесконечными границами

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании b, то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначают символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{12.1}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *существует* или *сходится.* Если указанный предел не существует (в частности, если он бесконечен), то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \qquad (12.2)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется формулой *

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (12.3)$$

где c – любая фиксированная точка оси Ox.

Таким образом, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует только тогда, когда существует каждый из интегралов $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ и $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Из приведенных определений непосредственно видно, что несобственный интеграл является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла с переменной границей интегрирования.

Заметим, что если функция положительна и непрерывна на бесконечном интервале $[x,\ +\infty)$ и если $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует, то мы можем его трактовать как площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, бесконечным интервалом $[a,\ +\infty)$ оси Ox и прямой $x=a$ (рис. 12.1).

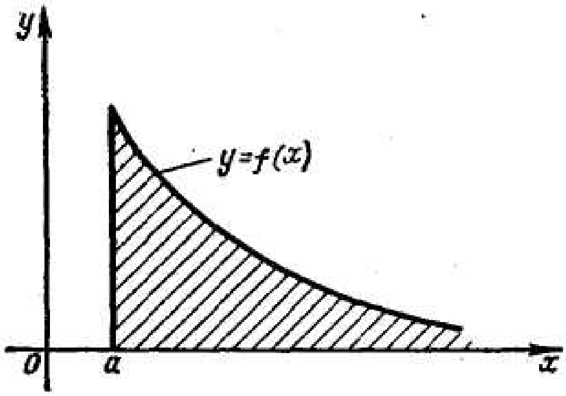


Рис. 12.1

Пример 12.1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha > 0$.

Решение. Рассмотрим интеграл $\int_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ $(b>1)$.

---

* Можно показать, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, определяемый формулой (7.2), не зависит от выбора точки c.

Если $\alpha \neq 1$, то $\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)$.

Если же $\alpha = 1$, то $\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \ln x\big|_1^b = \ln b$.

Пусть $\alpha > 1$; тогда $\alpha - 1 > 0$ и поэтому $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$. Следовательно, в этом случае $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \frac{1}{\alpha-1}$.

Пусть $\alpha < 1$; тогда имеем $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty$; аналогично при $\alpha = 1$ получим $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$.

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ при $\alpha > 0$ сходится, а при $\alpha \le 1$ расходится.

Пример 12.2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

По формуле (12.3), полагая c=0, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Но

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(arctg0 - arctga\right) =$$

$$= 0 - \left(-\pi/2\right) = \pi/2.$$

Аналогично можно показать, что $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$.

Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, т.е. интеграл сходится.

Пример 12.3. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx$ расходится, так как $\int\limits_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$ не имеет предела при $b \to +\infty$, хотя и остается заключенным между 0 и 2.

Можно показать, что большинство основных свойств определенных интегралов сохраняется для сходящихся интегралов с бесконечными пределами. В частности, например, справедлива формула замены переменной.

Часто удачной заменой переменной несобственный интеграл с бесконечными пределами сводится к определенному интегралу.

Пример 12.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Решение. Положим $x = tgz$, тогда

$$dx = \frac{dz}{\cos^2 z},\ \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{\left(\sec^2 z\right)^2} = \cos^4 z.$$

При этом если z меняется от 0 до $\pi/2$, то x меняется от 0 до $+\infty$. Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 z dz = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2z}{2} dz = \frac{\pi}{4}.$$

12.2. Интегралы от разрывных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < b$, а в точке b имеет разрыв. В этом случае определение интеграла от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ как предела интегральных сумм, вообще говоря, неприменимо, так как этот предел может и не существовать. В самом деле, пусть, например, $f(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ (рис. 7.2). Тогда при любом разбиении интервала $[a,\ b]$ на части $[a,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, ..., $[x_{n-1},\ b]$ функция $f(x)$ является неограниченной на последнем интервале $[x_{n-1},\ b]$ (так как по предположению $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$). Поэтому, если взять точку ξ_n достаточно близко к точке b, можно сделать произведение $f(\xi_n)\Delta x_n$, а следовательно, и интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ сколь угодно большими. Это значит, что интегральные суммы неограниченны, и, следовательно, они не имеют предела при стремлении шага разбиения λ к нулю.

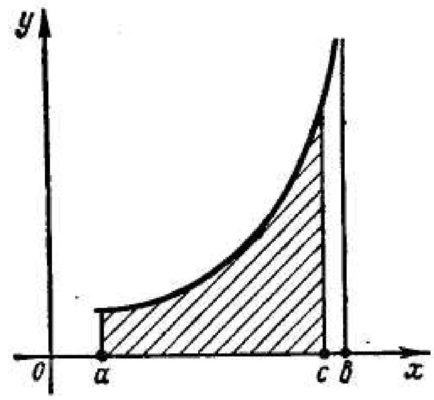


Рис. 12.2

Однако и в этом случае, несмотря на то, что прежнее определение интеграла неприемлемо, можно обобщить понятие интеграла.

Прежде чем переходить к определениям, разберем конкретный пример. Рассмотрим функцию $y = 1/\sqrt{1-x}$. Эта функция стремится к бесконечности при $x \to 1$ слева. Однако на интервале $[0,\ c]$, где $0 < c < 1$, функция непрерывна, и поэтому существует интеграл

$$\int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^c = 2\left(1-\sqrt{1-c}\right),$$

который имеет предел при $c \to 1-0$:

$$\lim_{c\to 1-0} 2\left(1-\sqrt{1-c}\right) = 2.$$

Этот предел и называют несобственным интегралом от разрывной на интервале $[0,\ 1]$ функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ и обозначают символом $\int\limits_0^c \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-0}\int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-0} 2\left(1-\sqrt{1-c}\right) = 2.$$

Обобщая этот пример, рассмотрим функцию $y = f(x)$, разрывную в точке b интервала $[a,\ b]$ и непрерывную на интервале $[a,\ c]$, где c – любая точка интервала $(a,\ b)$ (см. рис. 12.2).

Если при $c \to b$ слева определенный интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ стремится к конечному пределу, то этот предел называется *несобственным интегралом от разрывной функции* и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx. \qquad (12.4)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *существует* или *сходится*. Если указанный предел не существует, то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится.*

Аналогично, если функция $f(x)$ разрывна при приближении x справа к точке a, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+0}\int\limits_a^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b. \qquad (12.5)$$

Наконец, если функция $f(x)$ разрывна в некоторой внутренней точке d интервала $[a,\ b]$, то мы разбиваем этот интервал на два интервала: $[a,\ d]$ и

$[d,\,b]$. Если несобственные интегралы от данной функции существуют на каждом из этих интервалов, то сумма этих интегралов, по определению, называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,\,b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx. \qquad (12.6)$$

Таким образом, из определений непосредственно видно, что несобственный интеграл от разрывной функции является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла.

Пример12.5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. График подынтегральной функции изображен на рис. 6.3.

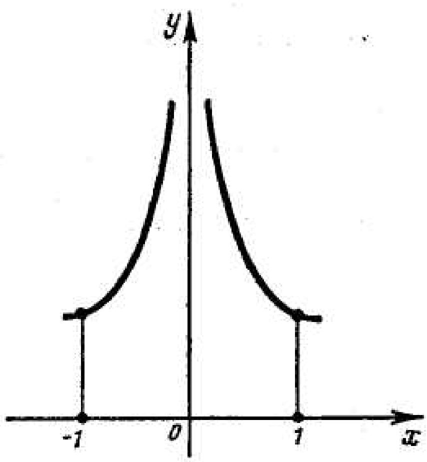


Рис. 12.3

Решение. Подынтегральная функция $\sqrt[3]{x^2}$ разрывна в точке x=0 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\right)$. Рассмотрим интегралы $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. Оба они существуют, причем $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$, $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$. Поэтому по определению существует интеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3+3=6.$$

Пример12.6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $1/x^2$ разрывна в точке x=0. Поэтому, как и в примере 6.5, рассмотрим отдельно интегралы $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Легко убедиться в том, что оба эти интеграла не существуют. Следовательно, по определению не существует интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Заметим, что если бы мы действовали формально, применяя формулу Ньютона – Лейбница к интегралу $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$, то получили бы заведомо неверный результат $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$. Этот результат неверен, так как интеграл от положительной функции на интервале $[-1,\ 1]$ не может быть отрицательным. Ошибка произошла потому, что мы незаконно применили формулу Ньютона – Лейбница, которая была выведена в предположении непрерывности подынтегральной функции на интервале интегрирования. В нашем же случае функция $1/x^2$ имеет в точке x=0 бесконечный разрыв.

13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

13.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении первообразной *F(x)* для заданной функции $f(x)$, поскольку ее можно рассматривать как задачу о нахождении функции $F(x)$, удовлетворяющей уравнению $F'(x)=f(x)$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$G\left(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n)}\right)=0, \qquad (13.1)$$

где G — некоторая функция от n + 2 переменных, $n\geq 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется *порядком* дифференциального уравнения. Например, задача о нахождении первообразной приводит к дифференциальному уравнению первого порядка, уравнение

$$x^2\left(y'''\right)^4-x\left(y'\right)^5+8=0$$

— третьего порядка и т.п.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *разрешенным относительно старшей производной,* если оно имеет вид

$$y^{(n)}=F\left(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n-1)}\right),$$

где F — некоторая функция от n + 1 переменной.

Решением дифференциального уравнения (13.1) называется такая функция *y =y (x),* которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция y = sin$x$ является решением уравнения y'' + y = 0, так как $(\sin x)''+\sin x=0$ для любых x.

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется *задачей интегрирования* данного *дифференциального уравнения.* График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общим решением дифференциального уравнения (13.1) *n*-го порядка называется такое его решение

$$y=\varphi\left(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_n\right), \tag{13.2}$$

которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$. (Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними.)

Пример 13.1. Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Найти закон изменения численности населения с течением времени. (Описать протекание демографического процесса.)

Решение. Пусть $y = y\ (t)$ — число жителей региона в момент времени t. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т.е.

$$\Delta y=k_1 y\Delta t-k_2 y\Delta t,$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=ky,$$

где $k=k_1-k_2$. Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем уравнение

$$y'=ky, \tag{13.3}$$

представляющее математическую модель демографического процесса.

Решая это уравнение, получаем закон изменения численности населения

$$y=Ce^{kt}, \tag{13.4}$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

13.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y'=f\left(x,\ y\right)$ называется дифференциальным уравнением I порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x\right)g\left(y\right) \tag{13.5}$$

или в виде

$$M\left(x\right)N\left(y\right)dx+P\left(x\right)Q(y)dy=0, \tag{13.6}$$

где $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ — некоторые функции переменной x; $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ — функции переменной y.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной y — в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Например, из (8.5) следует, что $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ и $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Выполняя интегрирование, приходим к решению уравнения (13.5).

Пример 13.2. Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}dx = xy\ dy$.

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} \tag{13.7}$$

или

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1 \tag{13.8}$$

(так как интеграл в левой части (8.7) табличный, а интеграл в правой части может быть найден, например, заменой $\sqrt{y^2+1} = t$, $y^2+1 = t^2$, $2y\ dy = 2t\ dt$ и $\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C_1 = \sqrt{y^2+1} + C_1$).

Решение (13.8) перепишем в виде $x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$.

13.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным,* если оно может быть представлено в виде

$$y' = g(y/x), \tag{13.9}$$

где g — некоторая функция (одной переменной).

Например, уравнение $y' = \frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x}$ — однородное.

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция $y = f(x, y)$ называется *однородной степени k* (по переменным *x* и *y),* если для произвольного числа α выполняется равенство

$$f(\alpha x,\ \alpha y)=\alpha^k f(x,\ y). \qquad (13.10)$$

Рассмотрим теперь способ решения дифференциального уравнения (13.9). Убедимся, что введение в рассмотрение вспомогательной функции z от переменной x (замена переменной) $z=y/x$ позволяет свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как $y = zx$, то $y'=z'x+z$, поэтому уравнение (7.9) приобретает следующий вид:

$$z'x+z=g(z),$$

откуда получим, что

$$\frac{dz}{g(z)-z}=\frac{dx}{x}. \qquad (13.11)$$

Пример 13.3. Решить уравнение

$$y'=\frac{x+2y}{x}. \qquad (13.12)$$

Решение. Так как $\frac{x+2y}{x}=1+2y/x$, то уравнение (8.12) имеет вид (8.9) при $g(y/x)=1+2y/x$. Положим $z=y/x$. Тогда $g(z)-z=1+2z-z=1+z$ и, согласно (13.11), имеем

$$\frac{dz}{z+z}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$$\ln|1+z|=\ln|x|+C_1,$$

Откуда $|1+z|=e^{C_1}|x|$ или $1+z=Cx$, где $C=\pm e^{C_1}$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим $1+\frac{y}{x}=Cx$, откуда $y=(Cx-1)x$.

13.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называют *линейным,* если оно имеет вид

$$y'+f(x)y=g(x), \qquad (13.13)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые (непрерывные) функции переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется *однородным,* в противном случае — *неоднородным.*

Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (13.13): будем искать решение в виде $y = u(x)v(x)$ (тем самым искомыми становятся функции $u(x)$ *и* $v(x)$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая — должна определяться из уравнения (7.13).

Так как $y'=u'v+uv'$, то из (7.13) следует $u'v+uv'+f(x)uv=g(x)$,

или

$$vu'+u\big(v'+f(x)v\big)=g(x). \qquad (13.14)$$

Найдем сначала какое-либо частное решение $v = v(x)$ уравнения

$$v' + f(x)v = 0. \qquad (13.15)$$

Тогда (см. (13.14)) функция $u = u(x)$ — решение уравнения

$$vu' = g(x). \qquad (13.16)$$

Тем самым решение исходного уравнения (13.13) сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными (см. (13.15) и (13.16)).

Пример 13.4. Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4. \qquad (13.17)$$

Решение. Разделив левую и правую части (13.17) на x, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Пусть $y = uv$, т.е. $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение (13.17) примет вид $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3$, или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{3}v\right) = 2x^3. \qquad (13.18)$$

Положим $v' - \frac{2}{x}v = 0$, или $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$, откуда $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при C=0 $\ln|v| = 2\ln|x|$ и $v = x^2$. При $v = x^2$ равенство (7.18) обратится в уравнение $u'x^2 = 2x^3$, или $\frac{du}{dx} = 2x$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = x^2 + C$. Тогда окончательно имеем $y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$.

13.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (тогда говорят, что данное дифференциальное уравнение *допускает понижение порядка).*

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x),$$

то оно решается последовательным интегрированием (см. пример 13.1).

Если в запись уравнения не входит искомая функция y (x), т.е. оно имеет вид

$$G(x,\, y',\, y'') = 0,$$

то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию $z = y''$.

Пример 13.5. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение. Положим $z = y'$. Тогда $y'' = z'$ и исходное уравнение принимает вид $xz' + z = 0$.

Откуда $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, приходим к решению $z = C_1/x$. Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение $y' = C_1/x$, или $dy = \frac{C_1 dx}{x}$, решая которое, окончательно имеем $y = C_1 \ln|x| + C_2$.

Если в уравнение не входит переменная x, т.е. оно имеет вид

$$G(y, y', y'') = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять y, а за неизвестную функцию - $z = z(y) = y'$.

Пример 13.6. Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Решение. Положим $z = z(y) = y'$. Тогда $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z$, и исходное уравнение принимает вид

$$2yzz' = z^2 + 1.$$

Данное уравнение – с разделяющимися переменными: $\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$ или $\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$. Выполняя интегрирование, получаем $\ln(z^2+1) = \ln|y| + C$ или, полагая $C = \ln C_1$, $z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Так как $z = y'$, то приходим к следующему уравнению относительно функции $y(x)$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx.$$

Выполняя интегрирование, получаем $\pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2)$ или

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2.$$

13.6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальной уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x), \qquad (13.19)$$

где p, q — некоторые действительные числа, $r(x)$ — некоторая функция. Если $r(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (13.20)$$

называется *однородным;* в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (13.19) называется *неоднородным.*

Можно доказать, что существует единственное решение уравнения (13.19), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = z_1$, $y'(x_0) = z_2$, где x_0, z_1, z_2 — некоторые (действительные) числа.

Рассмотрим сначала **решение линейного однородного уравнения** (13.20) с постоянными коэффициентами.

Напомним, что линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с коэффициентами C_1 и C_2 называется выражение вида $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Если линейная комбинация функций $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ равна нулевой функции только тогда, когда коэффициенты C_1 и C_2 равны нулю, то функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми,* в противном случае — *линейно зависимыми.*

Теорема 1. *Если* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — *линейно независимые частные решения уравнения* (13.20), *то общее решение этого уравнения является линейной комбинацией этих частных решений, т.е. имеет* вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (13.21)$$

для некоторых действительных чисел C_1*и* C_2.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (13.20), надо знать два его частных решения y_1 и y_2.

Будем искать решение уравнения (13.20) в форме

$$y = e^{\lambda x}, \qquad (13.22)$$

где λ — некоторое (действительное) число (если такое существует). Так как $\left(e^{\lambda x}\right)'' + p\left(e^{\lambda x}\right)' + qe^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x}$, то функция (13.22) является решением уравнения (7.20), если число λ есть корень уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (13.23)$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходного уравнения (13.20).

Описание решений уравнения (13.20) зависит от того, имеет ли соответствующее характеристическое уравнение (13.23) два различных корня, один корень или не имеет действительных корней. Справедлива теорема.

Теорема 2.

1. *Пусть характеристическое уравнение* (13.23) *уравнения* (13.20) *имеет действительные корни* λ_1 *и* λ_2, *причем* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда общее решение уравнения* (13.20) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad (13.24)$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые числа.*

2. *Если характеристическое уравнение* (13.23) *имеет один корень* λ *(кратности 2), то общее решение уравнения* (13.20) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \qquad (13.25)$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые числа.*

3. *Если характеристическое уравнение* (13.23) *не имеет действительных корней, то общее решение уравнения* (13.20) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad (13.26)$$

где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1, C_2 *- некоторые числа.*

Пример 13.7. Найти частное решение следующих уравнений при указанных начальных условиях:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение

а) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Найдем такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия. Так как $y(0) = C_1 + C_2$ и $y'(0) = C_1 + 2C_2$, то постоянные C_1 и C_2 находим, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + \ \ C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

По теореме о существовании и единственности решения уравнения вида (13.33) найденное частное решение $y = 2e^x + e^{2x}$ — искомое.

б) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Согласно п. 2 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y=(C_x+C_2x)e^x$. Так как $y(0)=1$, то $C_1=1$, и, поскольку $y'=y+C_2e^x$ и $y'(0)=0$, то $C_2=—1$. Таким образом, окончательно получаем частное решение

$$y = (1 - x)e^x.$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ не имеет действительных корней. В этом случае согласно п. 3 теоремы общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x \quad (\alpha = \beta = 1).$$

Так как $y(0)=1$, то $C_2=1$. Найдем $y' = (C_1 - C_2)e^x \sin x + (C_1 - C_2)e^x \cos x$. Учитывая, что $y'(0) = 1$, получим $C_1 = 0$. Таким образом, приходим к частному решению $y = e^x \cos x$.

Перейдем теперь к **решению линейного неоднородного уравнения** (13.19) с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может быть, в частности, решено *методом вариации произвольных постоянных,* который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного уравнения (13.20), имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (13.19). Затем решение уравнения (13.19) находится в виде $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r. \end{cases} \qquad (13.27)$$

Пример 13.8. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^x. \qquad (13.28)$$

Решение. Решая соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad (13.29)$$

находим

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^{2x}.$$

Полагая теперь, что C_1 и C_2 — функции переменной x, найдем первые производные этих функций, решая систему (13.27)

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' 2e^{2x} = e^x. \end{cases}$$

Найдем $C_1' = -1$, $C_2' = e^{-x}$. Полученные дифференциальные уравнения — с разделяющимися переменными. Решая эти уравнения, получаем $C_1 = -x + C_3$, $C_2 = -e^{-x} + C_4$, где C_3, C_4 — некоторые постоянные. Таким образом, окончательно решение равнения имеет вид

$$y = (-x + C_3)e^x + (-e^{-x} + C_4) =$$

$$= C_3 e^x + C_4 e^{2x} + (-x - 1)e^x.$$

Теорема 3. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* (13.19) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (13.20) *и частного решения исходного неоднородного уравнения* (13.19).

Следует отметить, что метод вариации произвольных постойных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев целесообразно использовать другие методы решения, основанные на теореме 3. Сначала, как и при методе вариации произвольных постоянных, находится общее решение однородного дифференциального уравнения (13.20), а затем отыскивается частное решение неоднородного уравнения (13.19). При этом вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения (13.19), задача сводится к отысканию коэффициентов этого частного решения.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть правая часть уравнения (13.19) является многочленом степени *m,* т.е. имеет вид

$$r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

где $a_{0,}$ a_1, ..., a_m — действительные числа и $a_m \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (7.19) следует искать в виде

$$u(x)=\left(C_0+C_1x+...+C_mx^m\right)x^s,$$

т.е. в виде произведения многочлена той же степени m на x^s, где s = 0, если $q\neq 0$ (см. (13.23)), s = 1, если q = 0 и $p\neq 0$ и $s=2$, если $p=q=0$. (Другими словами, показатель степени s равен кратности значения x = 0 как корня характеристического многочлена (13.23).)

Пример 7.9. Найти частное решение уравнения

$$y''-3y'=1+6x. \tag{13.30}$$

Решение. По сформулированному правилу частное решение уравнения (7.30) следует искать в виде

$$u(x)=\left(C_0+C_1x\right)x. \tag{13.31}$$

Найдем значения параметров C_0 и C_1 в данном выражении для $u(x)$. Дифференцируя (13.31), получаем

$$u'(x)=C_0+2C_1x, \qquad u''(x)=2C_1.$$

Так как $u(x)$ — решение уравнения (7.30), то значения C_0 и C_1 должны быть такими, что равенство $u''-3u'=1+6x$, т.е.

$$2C_1-3\left(C_0+2C_1x\right)=1+6x,$$

или

$$\left(2C_1-3C_0\right)-6C_1x=1+6x, \tag{13.32}$$

будет удовлетворяться тождественно, т.е. при всех x.

Поэтому уравнение (13.32) равносильно системе

$$\begin{cases} 2C_1-3C_0=1, \\ -6C_1\qquad\;\; =6. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $C_0=C_1=-1$, т.е. искомое частное решение уравнения (13.30)

$$u(x)=-x-x^2.$$

2. Пусть правая часть уравнения (8.19) имеет вид

$$r(x)=Ae^{\alpha x},$$

где α и A — некоторые действительные числа.

Тогда частное решение уравнения (13.19) следует искать в виде

$$u(x)=C_0x^se^{\alpha x}, \tag{13.33}$$

где показатель степени s равен кратности значения $x=\alpha$ как корня характеристического многочлена (13.23).

Пример 13.10. Найти частные решения уравнений:

а) $y''-3y'+2y=2e^{3x}$; б) $y''-3y'+2y=e^{2x}$;

в) $y''-2y'+y=6e^{x}$.

Решение.

а) В данном случае $\alpha=3$ и поскольку такого значения нет среди корней $\left(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\right)$ характеристического равнения $\lambda^2-3\lambda+2=0$, то s=0. Таким образом, частное решение уравнения (а) будем искать в виде $u=C_0e^{3x}$.

Тогда $u'=3C_0e^{3x}$, $u''=9C_0e^{3x}$.

Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (а), приходим к равенству

$$9C_0e^{3x} - 9C_0e^{3x} + 2C_0e^{3x} = 2e^{3x},$$

или

$$2C_0e^{3x} = 2e^{3x},$$

которое должно удовлетворяться тождественно. Поэтому $C_0 = 1$ и искомое частное решение $u = e^{3x}$.

б) Здесь $\alpha = 2$, и это значение совпадает с одним из двух различных корней $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2)$ соответствующего характеристического уравнения. Поэтому s=1, и частное решение уравнения (б) будем искать в виде $u = C_0xe^{2x}$.

Подставляя выражения u и ее производных в уравнение (б), получим (после преобразований) $u = xe^{2x}$.

в) В данном случае $\alpha = 1$. Одновременно корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ уравнения (в) являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (т.е. значение $\lambda = 1$ является корнем кратности 2). Поэтому $s = 2$, и частное решение уравнения (в) следует искать в виде $u = C_0x^2e^{2x}$.

Представляя выражение для u и ее производных в уравнение (в), получим после преобразований $u = 3x^2e^x$.

3. Пусть правая часть уравнения (13.19) имеет вид

$$r(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x,$$

где a, b, β — некоторые действительные числа и $\beta \neq 0$.

Тогда частное решение уравнения (8.19) следует искать в виде:

$$u(x) = x^s\left(C_0\cos\beta x + C_1\sin\beta x\right),$$

где s=1, если одновременно выполнены условия p=0 (см. 8.37), $q > 0$, $\beta = \sqrt{q}$ и $s = 0$ в остальных случаях. (Условия случая s=1 равносильны требованию, чтобы значение β в выражении $r(x)$ было таково, что комплексное число $i\beta$ было одним из корней характеристического уравнения (13.19).)

Пример 13.11. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x. \qquad (13.34)$$

Решение. По сформулированному правилу частное решение в данном случае следует искать в виде

$$u = C_0\cos x + C_1\sin x.$$

Найдем $u' = -C_0\sin x + C_1\cos x$, $u'' = -C_0\cos x - C_1\sin x$.

Подставляя выражения u'', u', u *в* уравнение (7.34), приходим к равенству

$$\left(-3C_1 + C_0\right)\cos x + \left(-C_1 + 3C_0 + 2C_1\right)\sin x = \sin x,$$

которое должно удовлетворяться тождественно.

Учитывая, что $x \equiv 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x$, получим систему:

$$\begin{cases} -3C_1 + C_0 = 0, \\ C_1 + 3C_0 = 1. \end{cases}$$

откуда C_0 = 0,3, C_1 = 0,1, и, следовательно, искомое выражение имеет вид $u = 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x$.

Рассмотренные случаи различных выражений правой части уравнения (13.19) являются частными случаями функции вида

$$r(x)=e^{\alpha x}\left(f(x)\cos\beta x+g(x)\sin\beta x\right), \qquad (13.35)$$

где $f(x)$, $g(x)$ — многочлены (с действительными коэффициентами);

α, β — некоторые (действительные) числа.

Можно доказать, что частное решение уравнения (13.19) с правой частью (13.35) следует искать в виде

$$u=x^s e^{\alpha x}\left(v(x)\cos\beta x+w(x)\sin\beta x\right), \qquad (13.36)$$

где s равно кратности корня $\alpha+i\beta$ характеристического многочлена (13.23); $v(x)$, $w(x)$ — многочлены, степень которых равна наибольшей из степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в выражении (13.35). Коэффициенты многочленов $v(x)$ и $w(x)$ находятся из системы линейных уравнений, получаемой после подстановки решения (13.36) и его производных в уравнение (13.19).

Замечание. Если правая часть $r(x)$ уравнения (13.19) является суммой некоторых функций, т.е.

$$r(x)=r_1(x)+r_2(x)+...+r_k(x),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частные решения $u_i(x)$ уравнений

$$y''+py'+qy=r_i(x), \text{ где } i=1,\ 2,\ ...,\ k, \text{ т.е.}$$

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_k(x).$$

Пример 7.12. Решить уравнение

$$y''-3y'+2y=2e^{3x}+e^{2x}+\sin x. \qquad (13.37)$$

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y''—3y'+2y=0$. Получим (см. ***пример 13.8***) $\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Учитывая замечание (см. выше), частное решение u дифференциального уравнения (13.37) будет равно сумме частных решений уравнений

$$y''-3y'+2y=2e^{3x}, \qquad y''-3y'+2y=e^{3x}, \qquad y''-3y'+2y=\sin x,$$

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)=e^{3x}+xe^{2x}+0{,}3\cos x+0{,}1\sin x.$$

На основании теоремы 3 общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y=\tilde{y}+u=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}+xe^{2x}+0{,}3\cos x+0{,}1\sin x.$$

13.7. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Рассмотрим некоторые (простейшие) задачи макроэкономической динамики.

Задача 1. Пусть $y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени *t*. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене *p,* т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени *t* составит $Y(t) = py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$y'(t) = lI(t). \qquad (13.38)$$

(Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией, т.е. считаем, что инвестиционный лаг равен нулю.)

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \qquad (13.39)$$

где коэффициент пропорциональности *m* (так называемая норма инвестиций) — постоянная величина, $0 < m < 1$.

Подставляя последнее выражение (7.39) для $I(t)$ в (7.38), приходим к уравнению

$$y' = ky, \qquad (13.40)$$

где $k = mpl$.

Полученное дифференциальное уравнение — с разделяющимися переменными (см. п. 13.2). Решая его, приходим к функции $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$.

Заметим, что уравнение (13.40) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и др.

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого временного интервала. В общем случае кривая спроса, т.е. зависимость цены *p* реализованной продукции от ее объема *y,* является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка). Поэтому модель роста в условиях конкурентного рынка примет вид

$$y' = mlp(y)y, \qquad (13.41)$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными.

Так как все сомножители в правой части уравнения (13.41) положительны, то $y'>0$, и это уравнение описывает возрастающую функцию $y(t)$. При исследовании функции $y(t)$ на выпуклость, естественно, используется понятие эластичности функции. Действительно, из (13.41) следует, что

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right).$$

Напомним, что эластичность спроса (относительно цены) определяется формулой $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$. Тогда выражение для y'' можно записать в виде

$$y'' = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right),$$

и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$.

Таким образом, если спрос эластичен, т.е. $|E_p(y)| > 1$ или $E_p(y) < -1$, то $y''>0$ и функция $y(t)$ выпукла вниз; в случае, если спрос не эластичен, т.е. $|E_p(y)| < 1$, или $-1 < E_p(y) < 1$, то $y''< 0$ и функция $y(t)$ выпукла вверх.

Пример 13.13. Найти выражение для объема реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, норма акселерации $1/l = 2$, норма инвестиций $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$.

Решение. Уравнение (13.41) в этом случае принимает вид

$$y' = (2-y)y,$$

или

$$\frac{dy}{(2-y)y} = dt.$$

Выполняя почленное интегрирование, получаем

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + C_1,$$

или

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}, \qquad (13.42)$$

где $C = \pm e^{C_1}$.

Учитывая $y(0) = 0{,}5$, получаем, что $C = -3$. Выражая теперь y из (13.42), окончательно имеем

$$y = \frac{2}{1+3e^{-2t}}.$$

График данной функции схематично изображен на рисунке (13.1). В данном случае эластичность спроса задается функцией $E_p(y) = \frac{y-2}{y}$ и условие

$E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp} = \frac{y-2}{y}$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает y=1.

Кривая, изображенная на рис. 13.1, называется *логистической.* Подобные кривые описывают процесс распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде и др.

Задача 2. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(T). \qquad (13.43)$$

Рис. 13.1

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t), \qquad (13.44)$$

где b — коэффициент капиталоемкости прироста дохода (что равносильно (13.38) при постоянной цене на продукцию p и $l = 1/(pb)$).

Рассмотрим поведение функции дохода $Y(t)$ в зависимости от функции $C(t)$.

Пусть $C(t)$ представляет фиксированную часть получаемого дохода: $C(t) = (1-m)Y(t)$, где m — норма инвестиций (см. задачу 1). Тогда из (13.43) и (13.44) получаем

$$Y' = \frac{m}{b}Y, \qquad (13.45)$$

что равносильно уравнению (13.40) при $p = const$.

В ряде случаев вид функции потребления $C(t)$ бывает известен (из некоторых дополнительных соображений).

Пример 13.14. Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 1/2$, $Y(0) = 2\,2$.

Решение. Из соотношений (13.43) и (13.44) имеем уравнение

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

т.е. функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Для его решения воспользуемся методом, описанным в п. 13.6: будем искать решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$.

Тогда имеем $u(t) = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$, $v(t) = e^{2t}$. Значение постоянной C находим из начальных условий: поскольку $Y(0) = u(0)v(0) = 2$, то C=1. Окончательно имеем $Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.
3. Кременр Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 479 с. – (Серия «Золотой фонд российских учебников»).
4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1, 2. М.: Айрис-пресс, 2003. - 576 с.: ил.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.
7. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. - М.: Высшая школа, 1978. - 712 с.

Ирина Ивановна Кулешова

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Часть II

Методическое пособие для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика» всех форм обучения

Подписано к печати 23.12.23. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 7,88. Тираж 20 экз. Зак. 231930. Рег. № 31.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.